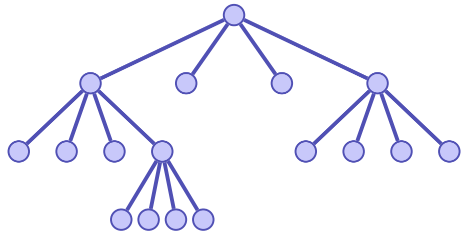
18. Quadtrees

Quadtrees, Kollisionsdetektion, Bildsegmentierung

Quadtree

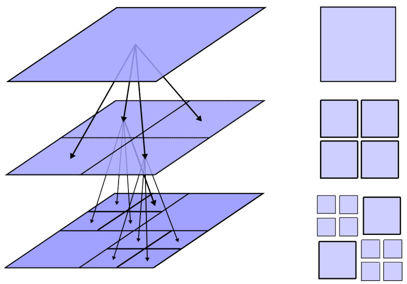
Ein Quadtree ist ein Baum der Ordnung 4.



... und ist als solcher nicht besonders interessant, ausser man verwendet ihn zur...

Quadtree - Interpretation und Nutzen

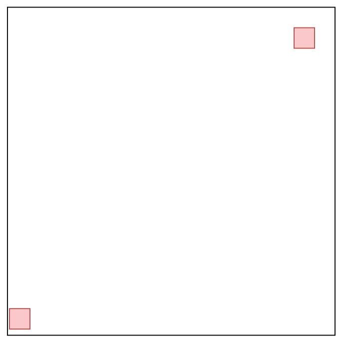
Partitionierung eines zweidimensionalen Bereiches in 4 gleich grosse Teile.



[Analog für drei Dimensionen mit einem *Octtree* (Baum der Ordnung 8)]

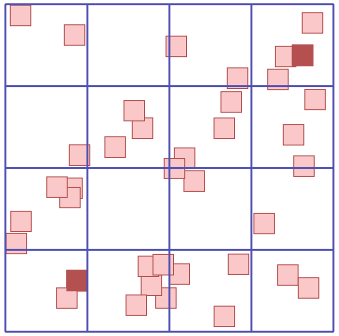
Beispiel 1: Erkennung von Kollisionen

- Objekte in der 2D-Ebene, z.B. Teilchensimulation auf dem Bildschirm.
- Ziel: Erkennen von Kollisionen



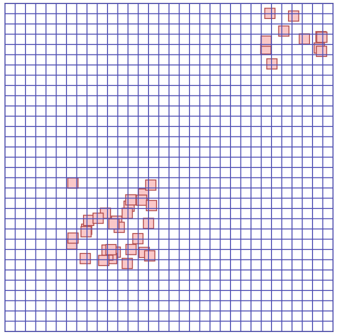
Idee

- Viele Objekte: n^2 Vergleiche (naiv)
- Verbesserung?
- Offensichtlich: keine Kollisionsdetektion für weit entfernte Objekte nötig.
- Was ist „weit entfernt”?
- Gitter $(m \times m)$
- Kollisionsdetektion pro Gitterzelle



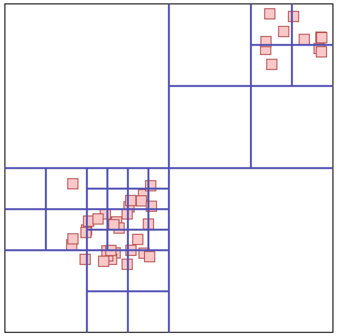
Gitter

- Gitter hilft oft, aber nicht immer
- Verbesserung?
- Gitter verfeinern?
- Zu viele Gitterzellen!



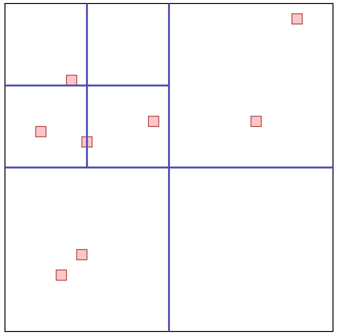
Adaptive Gitter

- Gitter hilft oft, aber nicht immer
- Verbesserung?
- Gitter *adaptiv* verfeinern!
- Quadtree!



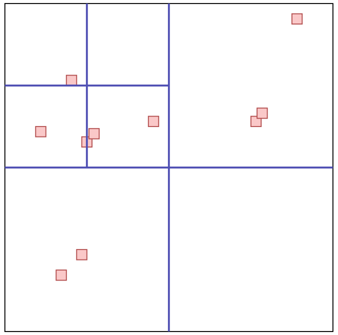
Algorithmus: Einfügen

- Quadtree startet mit einem einzigen Knoten
- Objekte werden zu dem Knoten hinzugefügt. Wenn in einem Knoten zu viele Objekte sind, wird der Knoten geteilt.
- Objekte, die beim Split auf dem Rand zu liegen kommen, werden im höher gelegenen Knoten belassen.

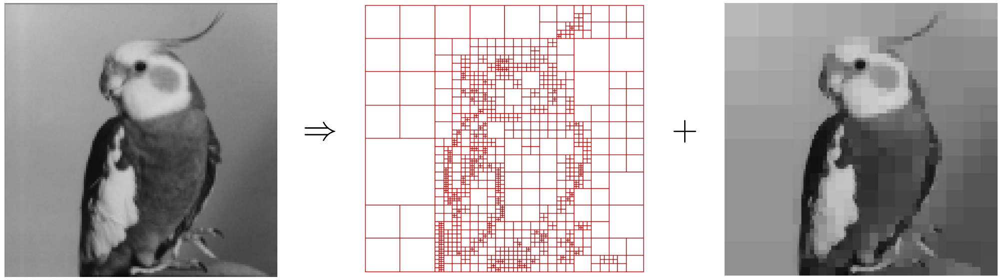


Algorithmus: Kollisionsdetektion

- Durchlaufe den Quadtree rekursiv. Für jeden Knoten teste die Kollision der enthaltenen Objekte mit Objekten im selben Knoten oder (rekursiv) enthaltenen Knoten.

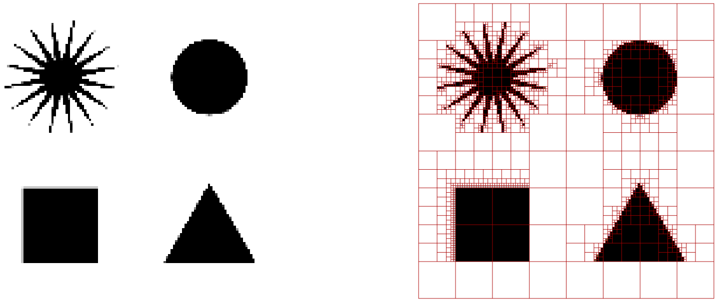


Beispiel 2: Bildsegmentierung



(Mögliche Anwendungen: Kompression, Entrauschen, Kantendetektion)

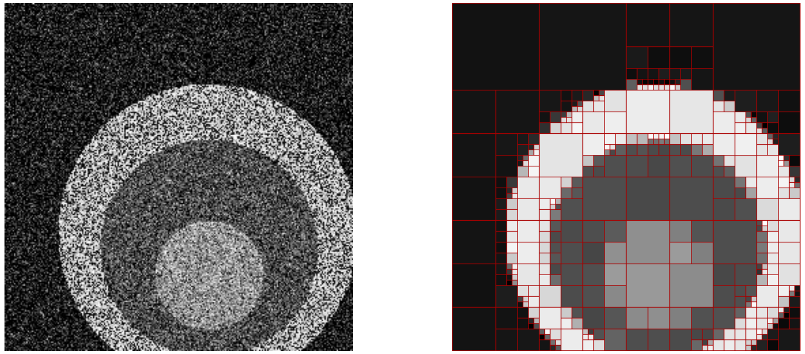
Quadtree auf Einfarbenbild



Erzeugung des Quadtree ähnlich wie oben: unterteile Knoten rekursiv bis jeder Knoten nur Pixel einer Farbe enthält.

Quadtree mit Approximation

Wenn mehr als zwei Farbewerte vorhanden sind, wird der Quadtree oft sehr gross. ⇒ Komprimierte Darstellung: *approximiere* das Bild stückweise konstant auf Rechtecken eines Quadtrees.



Stückweise konstante Approximation

(Graustufen-)Bild $z \in \mathbb{R}^S$ auf den Pixelindizes S. [37]

Rechteck $r \subset S$.

Ziel: bestimme

$$\arg\min_{x\in r} \sum_{s\in r} (z_s - x)^2$$

Lösung: das arithmetisches Mittel $\mu_r = \frac{1}{|r|}\sum_{s\in r} z_s$

[37] Wir nehmen an, dass S ein Quadrat ist mit Seitenlänge 2^k für ein $k \geq 0$

Zwischenergebnis

Die im Sinne des mittleren quadratischen Fehlers beste Approximation

$$\mu_r = \frac{1}{|r|}\sum_{s\in r} z_s$$

und der dazugehörige Fehler

$$\sum_{s\in r} (z_s - \mu_r)^2 =: \|z_r - \mu_r\|_2^2$$

können nach einer $\mathcal{O}(|S|)$ Tabellierung schnell berechnet werden: Präfixsummen!

Welcher Quadtree?

Konflikt

- *Möglichst nahe an den Daten* $\Rightarrow$ kleine Rechtecke, grosser Quadtree. Extremer Fall: ein Knoten pro Pixel. Approximation = Original
- *Möglichst wenige Knoten* $\Rightarrow$ Grosse Rechtecke, kleiner Quadtree Extremfall: ein einziges Rechteck. Approximation = ein Grauwert

Welcher Quadtree?

Idee: wähle zwischen Datentreue und Komplexität durch Einführung eines Regularisierungsparameters $\gamma \geq 0$

Wähle Quadtree T mit Blättern[38] $L(T)$ so, dass T folgenden Funktion minimiert

$$H_\gamma(T, z) := \gamma \cdot \underbrace{|L(T)|}_{\text{Anzahl Blätter}} + \underbrace{\sum_{r\in L(T)} \|z_r - \mu_r\|_2^2}_{\text{Summierter Approximationsfehler aller Blätter}}.$$

[38] hier: Blatt = Knoten mit Nullkindern.

Regularisierung

Sei T ein Quadtree über einem Rechteck S_T und seien $T_{ll}, T_{lr}, T_{ul}, T_{ur}$ vier mögliche Unterbäume und

$$\widehat{H}_\gamma(T,z) := \min_T \gamma \cdot |L(T)| + \sum_{r \in L(T)} \|z_r - \mu_r\|_2^2$$

Extremfälle:
$\gamma = 0 \Rightarrow$ Originaldaten;
$\gamma \to \infty \Rightarrow$ ein Rechteck

Beobachtung: Rekursion

- Wenn der (Sub-)Quadtree T nur ein Pixel hat, so kann nicht aufgeteilt werden und es gilt

$$\widehat{H}_\gamma(T,z) = \gamma$$

- Andernfalls seien

$$M_1 := \gamma + \|z_{S_T} - \mu_{S_T}\|_2^2$$
$$M_2 := \widehat{H}_\gamma(T_{ll},z) + \widehat{H}_\gamma(T_{lr},z) + \widehat{H}_\gamma(T_{ul},z) + \widehat{H}_\gamma(T_{ur},z)$$

Dann

$$\widehat{H}_\gamma(T,z) = \min\{\underbrace{M_1(T,\gamma,z)}_{\text{kein Split}}, \underbrace{M_2(T,\gamma,z)}_{\text{Split}}\}$$

Algorithmus: Minimize(z,r,γ)

Input: Bilddaten $z \in \mathbb{R}^S$, Rechteck $r \subset S$, Regularisierung $\gamma > 0$
Output: $\min_T \gamma|L(T)| + \|z - \mu_{L(T)}\|_2^2$

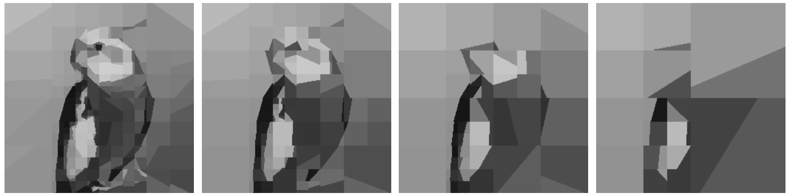
if $|r| = 0$ **then return** 0
$m \leftarrow \gamma + \sum_{s \in r} (z_s - \mu_r)^2$
if $|r| > 1$ **then**
  Split r into r_{ll},r_{lr},r_{ul},r_{ur}
  $m_1 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ll}, \gamma)$; $m_2 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{lr}, \gamma)$
  $m_3 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ul}, \gamma)$; $m_4 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ur}, \gamma)$
  $m' \leftarrow m_1 + m_2 + m_3 + m_4$
else
  $m' \leftarrow \infty$
if $m' < m$ **then** $m \leftarrow m'$
return m

Analyse

Der Minimierungsalgorithmus über dyadische Partitionen (Quadtree) benötigt $\mathcal{O}(|S| \log |S|)$ Schritte.

Anwendung: Entrauschen (zusätzlich mit Wedgelets)

noised | $\gamma = 0.003$ | $\gamma = 0.01$ | $\gamma = 0.03$ | $\gamma = 0.1$



$\gamma = 0.3$ | $\gamma = 1$ | $\gamma = 3$ | $\gamma = 10$

Erweiterungen: Affine Regression + Wedgelets

Andere Ideen

kein Quadtree: hierarchisch-eindimensionales Modell (benötigt Dynamic Programming)