

16. Natürliche Suchbäume

[Ottman/Widmayer, Kap. 5.1, Cormen et al, Kap. 12.1 - 12.3]

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing:

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit.

Manche Operationen gar nicht unterstützt:

- Aufzählen von Schlüssel in aufsteigender Anordnung

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit.

Manche Operationen gar nicht unterstützt:

- Aufzählen von Schlüssel in aufsteigender Anordnung
- Nächst kleinerer Schlüssel zu gegebenem Schlüssel

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit.

Manche Operationen gar nicht unterstützt:

- Aufzählen von Schlüssel in aufsteigender Anordnung
- Nächst kleinerer Schlüssel zu gegebenem Schlüssel
- Schlüssel k in vorgegebenem Intervall $k \in [l, r]$

Bäume

Bäume sind

- Verallgemeinerte Listen: Knoten können mehrere Nachfolger haben
- Spezielle Graphen: Graphen bestehen aus Knoten und Kanten. Ein Baum ist ein zusammenhängender, gerichteter, azyklischer Graph.

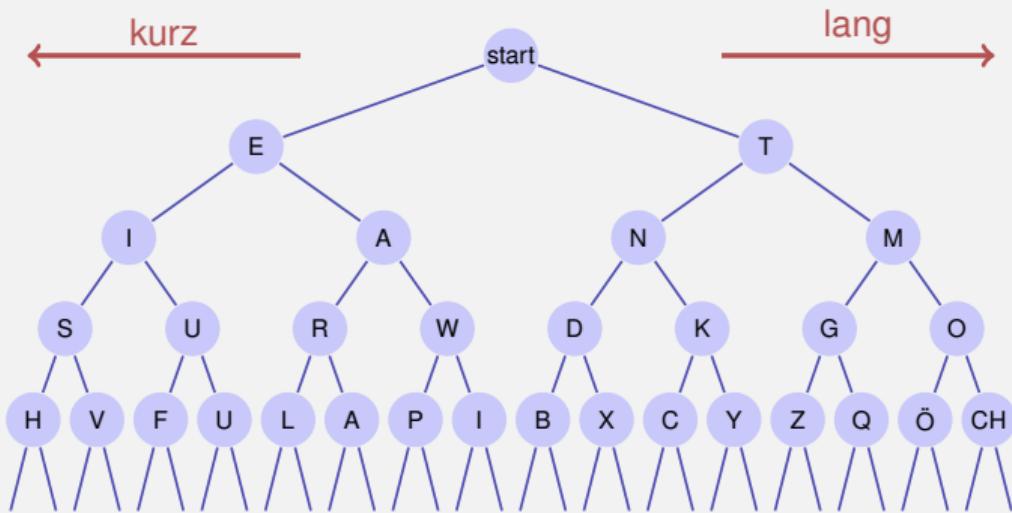
Bäume

Verwendung

- Entscheidungsbäume: Hierarchische Darstellung von Entscheidungsregeln
- Syntaxbäume: Parsen und Traversieren von Ausdrücken, z.B. in einem Compiler
- Codebäume: Darstellung eines Codes, z.B. Morsealphabet, Huffman Code
- Suchbäume: ermöglichen effizientes Suchen eines Elementes

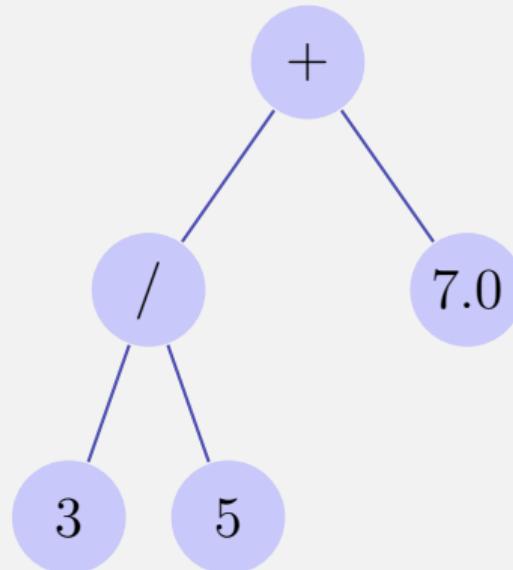


Beispiele



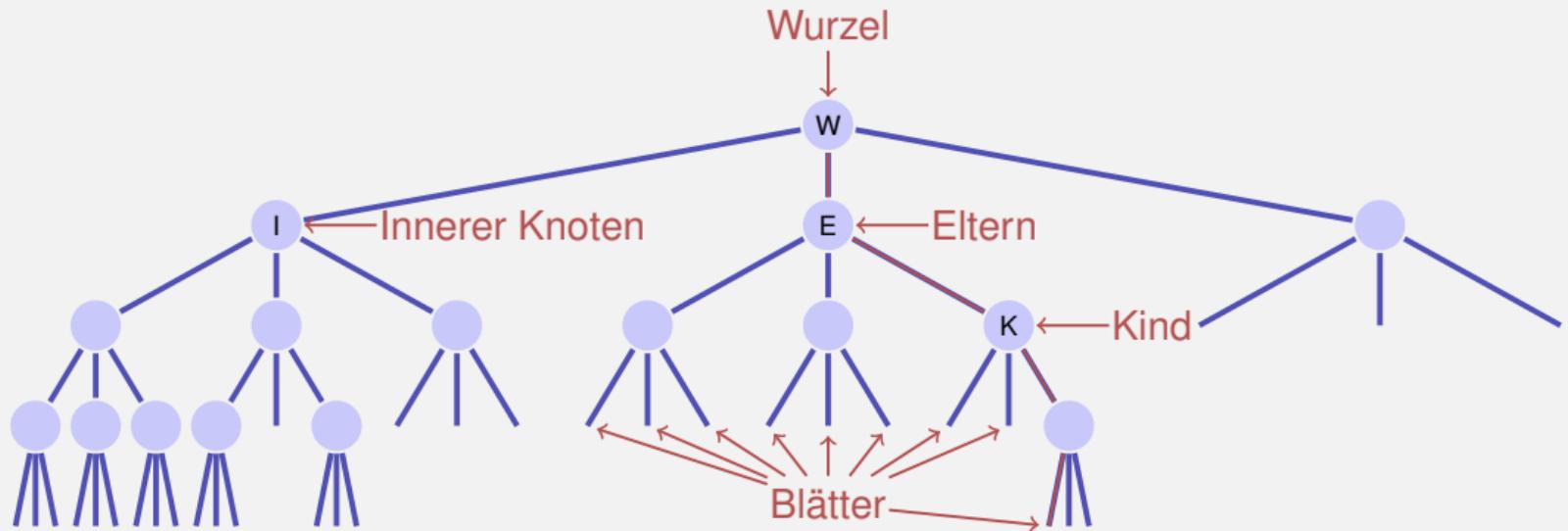
Morsealphabet

Beispiele

$$3/5 + 7.0$$


Ausdrucksbaum

Nomenklatur



- Ordnung des Baumes: Maximale Anzahl Kindknoten, hier: 3
- Höhe des Baumes: maximale Pfadlänge Wurzel – Blatt (hier: 4)

Binäre Bäume

Ein binärer Baum ist

- entweder ein Blatt, d.h. ein leerer Baum,
- oder ein innerer Knoten mit zwei Bäumen T_l (linker Teilbaum) und T_r (rechter Teilbaum) als linken und rechten Nachfolger.

In jedem inneren Knoten v wird gespeichert

- ein Schlüssel $v.key$ und
- zwei Zeiger $v.left$ und $v.right$ auf die Wurzeln der linken und rechten Teilbäume.

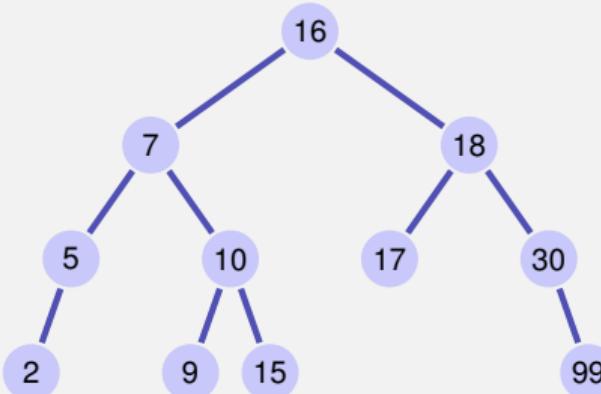
key	
left	right

Ein Blatt wird durch den **null**-Zeiger repräsentiert

Binärer Suchbaum

Ein binärer Suchbaum ist ein binärer Baum, der die *Suchbaumeigenschaft* erfüllt:

- Jeder Knoten v speichert einen Schlüssel
- Schlüssel im linken Teilbaum $v.\text{left}$ kleiner als $v.\text{key}$
- Schlüssel im rechten Teilbaum $v.\text{right}$ grösser als $v.\text{key}$



Suchen

Input: Binärer Suchbaum mit Wurzel r ,
Schlüssel k

Output: Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

$v \leftarrow r$

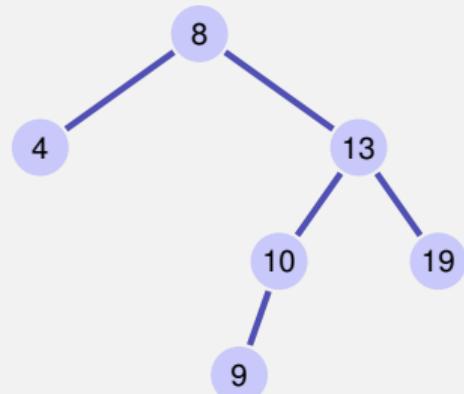
while $v \neq \text{null}$ **do**

if $k = v.\text{key}$ **then**
 return v

else if $k < v.\text{key}$ **then**
 $v \leftarrow v.\text{left}$

else
 $v \leftarrow v.\text{right}$

return **null**



Suchen

Input: Binärer Suchbaum mit Wurzel r ,
Schlüssel k

Output: Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

$v \leftarrow r$

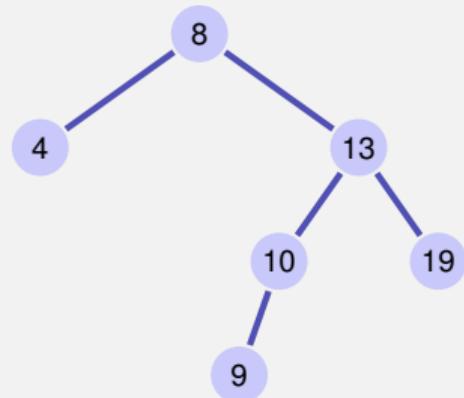
while $v \neq \text{null}$ **do**

if $k = v.\text{key}$ **then**
 return v

else if $k < v.\text{key}$ **then**
 $v \leftarrow v.\text{left}$

else
 $v \leftarrow v.\text{right}$

return null



Search (12)

Suchen

Input: Binärer Suchbaum mit Wurzel r ,
Schlüssel k

Output: Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

$v \leftarrow r$

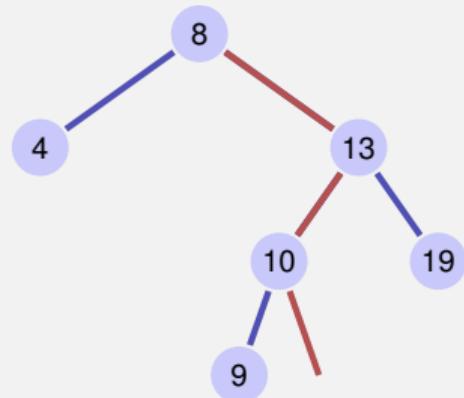
while $v \neq \text{null}$ **do**

if $k = v.\text{key}$ **then**
 return v

else if $k < v.\text{key}$ **then**
 $v \leftarrow v.\text{left}$

else
 $v \leftarrow v.\text{right}$

return null



Search (12)

Suchen

Input: Binärer Suchbaum mit Wurzel r ,
Schlüssel k

Output: Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

$v \leftarrow r$

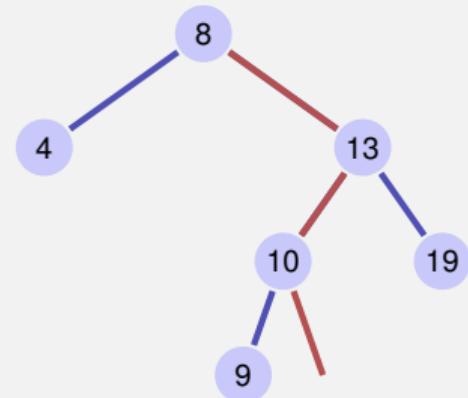
while $v \neq \text{null}$ **do**

if $k = v.\text{key}$ **then**
 return v

else if $k < v.\text{key}$ **then**
 $v \leftarrow v.\text{left}$

else
 $v \leftarrow v.\text{right}$

return **null**



Search (12) \rightarrow **null**

Höhe eines Baumes

Die Höhe $h(T)$ eines binären Baumes T mit Wurzel r ist gegeben als

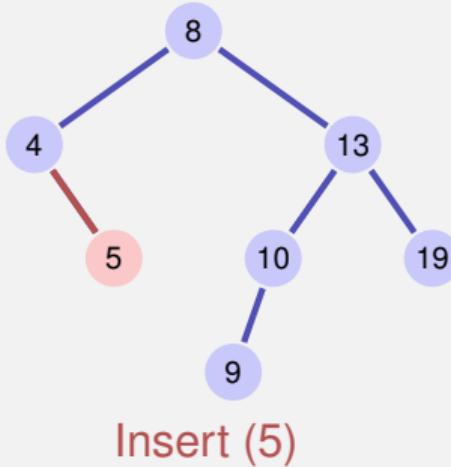
$$h(r) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r = \mathbf{null} \\ 1 + \max\{h(r.\text{left}), h(r.\text{right})\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Laufzeit der Suche ist somit im schlechtesten Fall $\mathcal{O}(h(T))$

Einfügen eines Schlüssels

Einfügen des Schlüssels k

- Suche nach k .
- Wenn erfolgreich:
Fehlerausgabe
- Wenn erfolglos: Einfügen des
Schlüssels am erreichten Blatt.

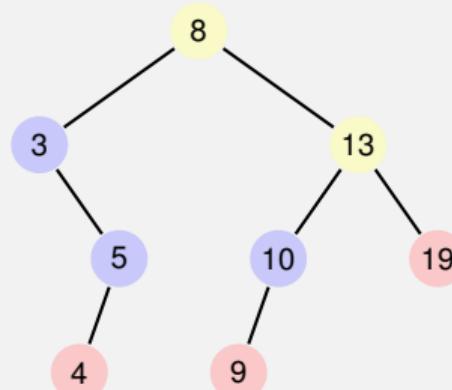


Knoten entfernen

Drei Fälle möglich

- Knoten hat keine Kinder
- Knoten hat ein Kind
- Knoten hat zwei Kinder

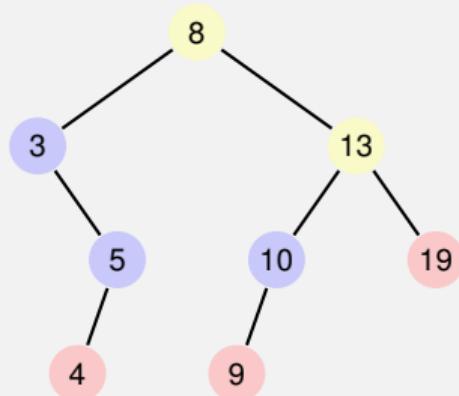
[Blätter zählen hier nicht]



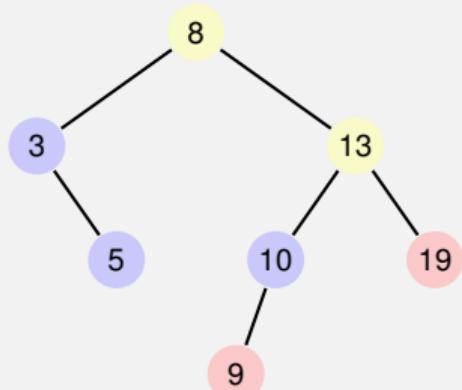
Knoten entfernen

Knoten hat keine Kinder

Einfacher Fall: Knoten durch Blatt ersetzen.



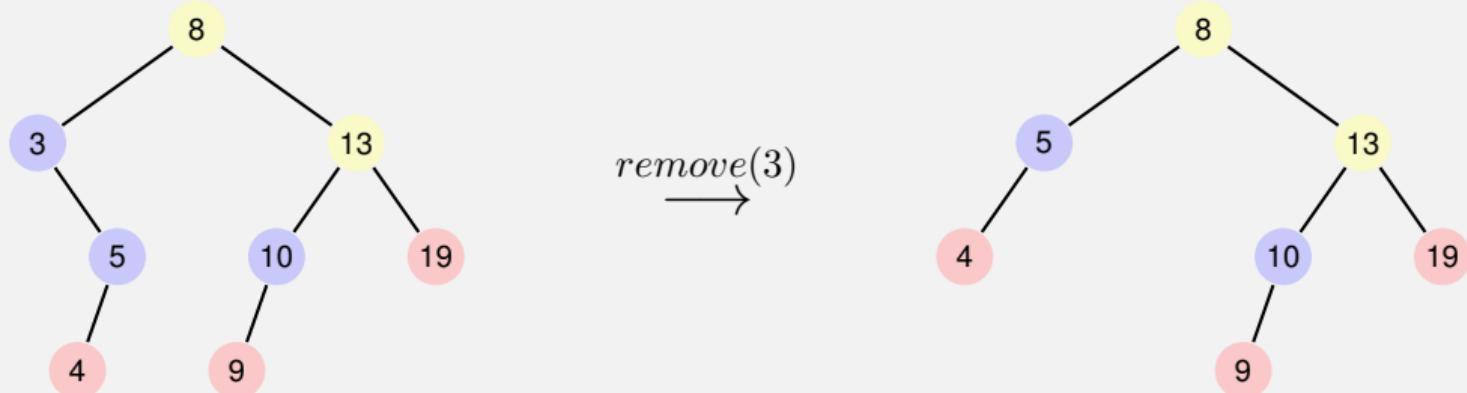
remove(4)



Knoten entfernen

Knoten hat ein Kind

Auch einfach: Knoten durch das einzige Kind ersetzen.



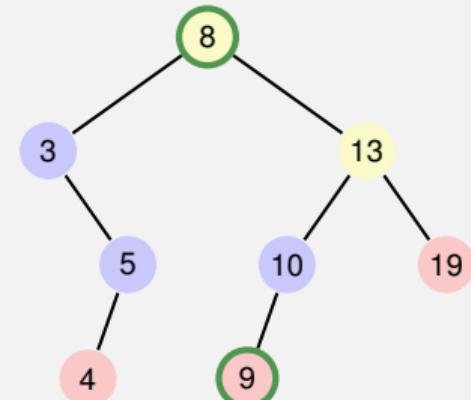
Knoten entfernen

Knoten v hat zwei Kinder

Beobachtung: Der kleinste Schlüssel im rechten Teilbaum $v.\text{right}$ (der *symmetrische Nachfolger* von v)

- ist kleiner als alle Schlüssel in $v.\text{right}$
- ist grösser als alle Schlüssel in $v.\text{left}$
- und hat kein linkes Kind.

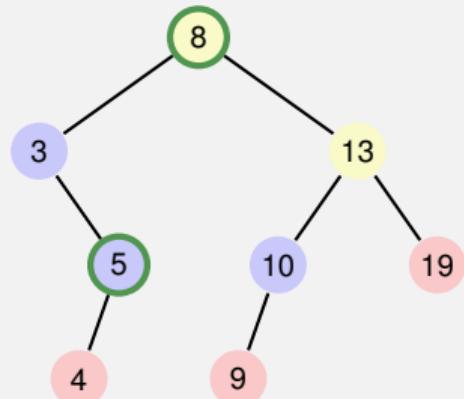
Lösung: ersetze v durch seinen symmetrischen Nachfolger



Aus Symmetriegründen...

Knoten v hat zwei Kinder

Auch möglich: ersetze v durch seinen
symmetrischen Vorgänger



Algorithmus SymmetricSuccessor(v)

Input: Knoten v eines binären Suchbaumes

Output: Symmetrischer Nachfolger von v

$w \leftarrow v.\text{right}$

$x \leftarrow w.\text{left}$

while $x \neq \text{null}$ **do**

$w \leftarrow x$

$x \leftarrow x.\text{left}$

return w

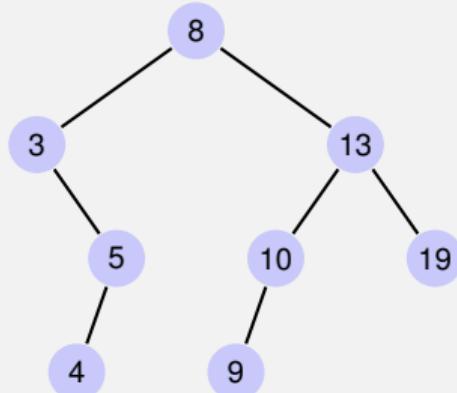
Analyse

Löschen eines Elementes v aus einem Baum T benötigt $\mathcal{O}(h(T))$ Elementarschritte:

- Suchen von v hat Kosten $\mathcal{O}(h(T))$
- Hat v maximal ein Kind ungleich **null**, dann benötigt das Entfernen $\mathcal{O}(1)$
- Das Suchen des symmetrischen Nachfolgers n benötigt $\mathcal{O}(h(T))$ Schritte. Entfernen und Einfügen von n hat Kosten $\mathcal{O}(1)$

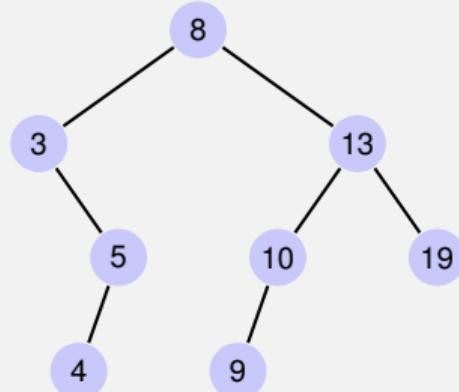
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.



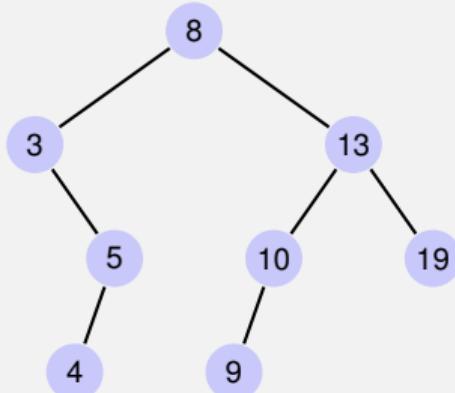
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19



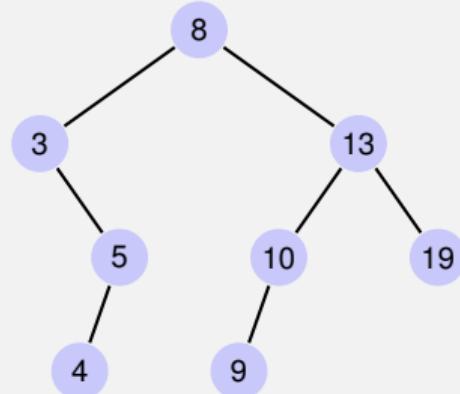
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
 $8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19$
- Nebenreihenfolge (postorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v .



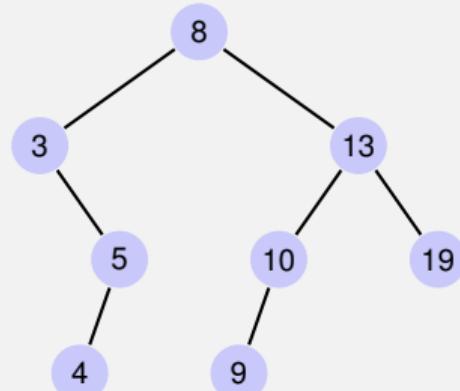
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- Nebenreihenfolge (postorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v .
4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8



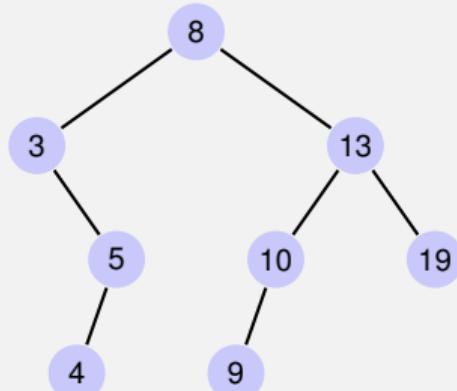
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
 $8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19$
- Nebenreihenfolge (postorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v .
 $4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8$
- Symmetrische Reihenfolge (inorder):
 $T_{\text{left}}(v)$, dann v , dann $T_{\text{right}}(v)$.



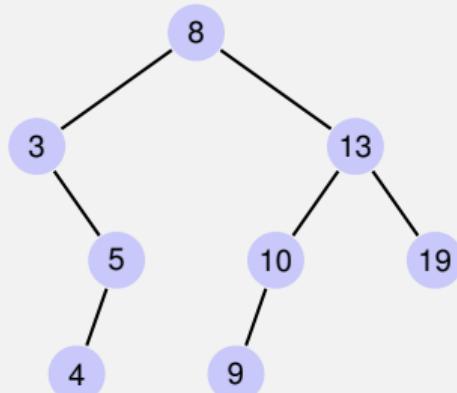
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v , dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
 $8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19$
- Nebenreihenfolge (postorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v .
 $4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8$
- Symmetrische Reihenfolge (inorder):
 $T_{\text{left}}(v)$, dann v , dann $T_{\text{right}}(v)$.
 $3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 19$

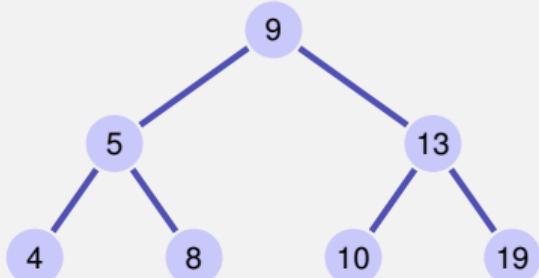


Weitere unterstützte Operationen

- $\text{Min}(T)$: Auslesen des Minimums in $\mathcal{O}(h)$
- $\text{ExtractMin}(T)$: Auslesen und Entfernen des Minimums in $\mathcal{O}(h)$
- $\text{List}(T)$: Ausgeben einer sortierten Liste der Elemente von T
- $\text{Join}(T_1, T_2)$: Zusammenfügen zweier Bäume mit $\max(T_1) < \min(T_2)$ in $\mathcal{O}(n)$.

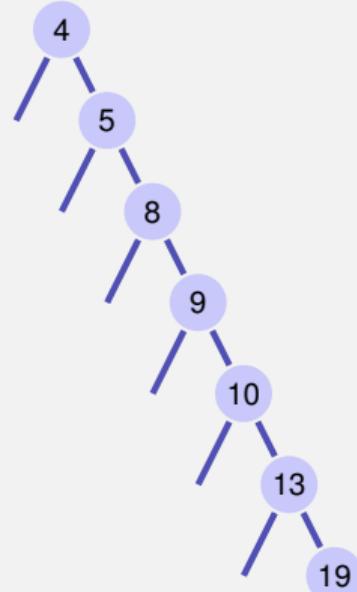


Degenerierte Suchbäume

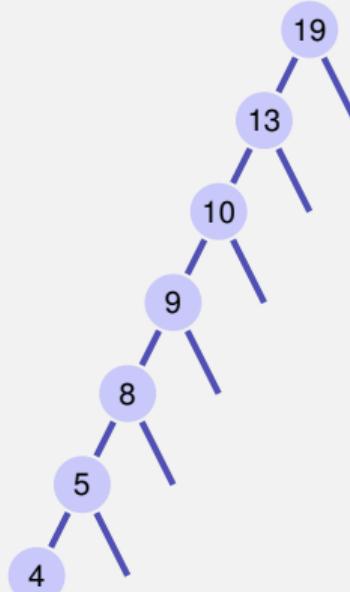


Insert 9,5,13,4,8,10,19

bestmöglich
balanciert



Insert 4,5,8,9,10,13,19
Lineare Liste



Insert 19,13,10,9,8,5,4
Lineare Liste

Probabilistisch

Ein Suchbaum, welcher aus einer zufälligen Sequenz von Zahlen erstellt wird hat erwartete Pfadlänge von $\mathcal{O}(\log n)$.

Achtung: das gilt nur für Einfügeoperation. Wird der Baum zufällig durch Einfügen und Entfernen gebildet, ist die erwartete Pfadlänge $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Balancierte Bäume stellen beim Einfügen und Entfernen (z.B. durch *Rotationen*) sicher, dass der Baum balanciert bleibt und liefern eine $\mathcal{O}(\log n)$ Worst-Case-Garantie.

17. AVL Bäume

Balancierte Bäume [Ottman/Widmayer, Kap. 5.2-5.2.1, Cormen et al, Kap. Problem 13-3]

Ziel

Suchen, Einfügen und Entfernen eines Schlüssels in Baum mit n Schlüsseln, welche in zufälliger Reihenfolge eingefügt wurden im Mittel in $\mathcal{O}(\log_2 n)$ Schritten.

Schlechtester Fall jedoch: $\Theta(n)$ (degenerierter Baum).

Ziel: Verhinderung der Degenerierung. Künstliches, bei jeder Update-Operation erfolgtes Balancieren eines Baumes

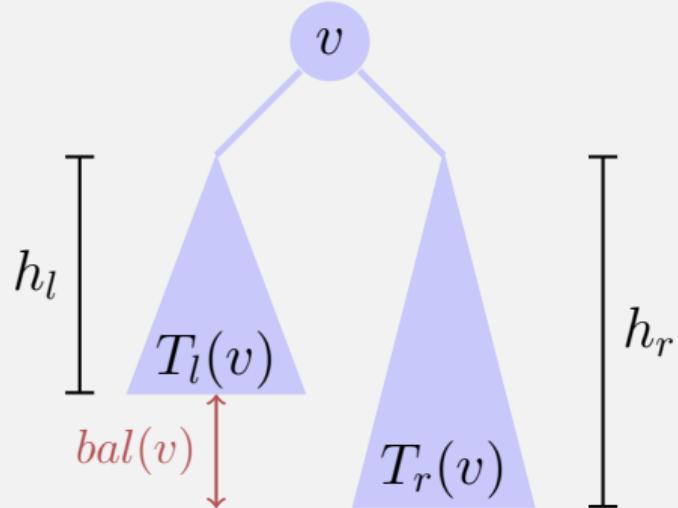
Balancierung: garantiere, dass ein Baum mit n Knoten stets eine Höhe von $\mathcal{O}(\log n)$ hat.

Adelson-Venskii und Landis (1962): AVL-Bäume

Balance eines Knotens

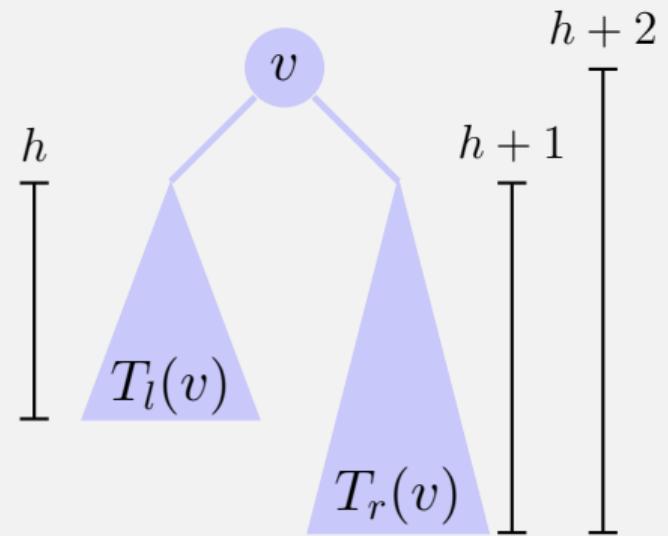
Die *Balance* eines Knotens v ist definiert als die Höhendifferenz seiner beiden Teilbäume $T_l(v)$ und $T_r(v)$

$$\text{bal}(v) := h(T_r(v)) - h(T_l(v))$$

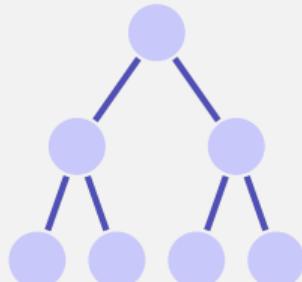


AVL Bedingung

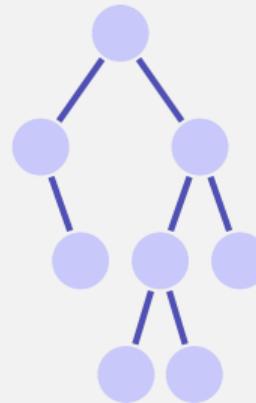
AVL Bedingung: für jeden Knoten v eines Baumes gilt $\text{bal}(v) \in \{-1, 0, 1\}$



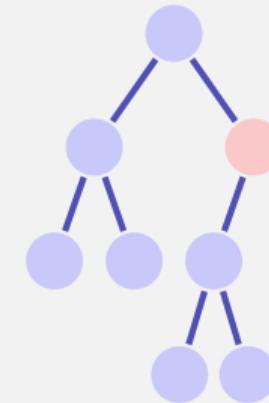
(Gegen-)Beispiele



AVL Baum der Höhe
2



AVL Baum der Höhe
3

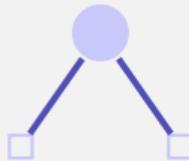


Kein AVL Baum

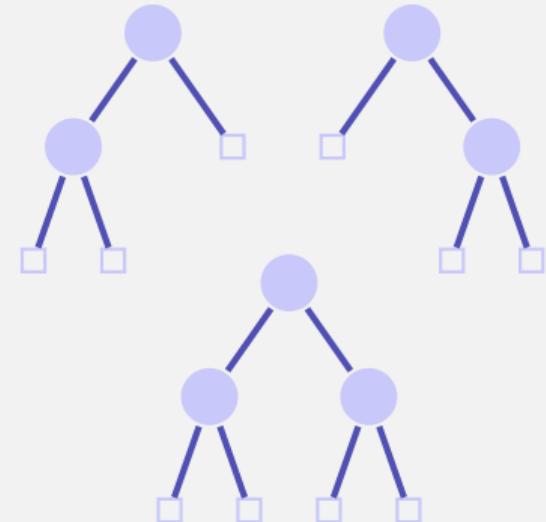
Anzahl Blätter

- 1. Beobachtung: Ein Suchbaum mit n Schlüsseln hat genau $n + 1$ Blätter. Einfaches Induktionsargument.
 - Der Suchbaum mit $n = 0$ Schlüsseln hat $m = 1$ Blätter
 - Wird ein Schlüssel (Knoten) hinzugefügt ($n \rightarrow n + 1$), so ersetzt er ein Blatt und fügt zwei Blätter hinzu ($m \rightarrow m - 1 + 2 = m + 1$).
- 2. Beobachtung: untere Grenze für Anzahl Blätter eines Suchbaums zu gegebener Höhe erlaubt Abschätzung der maximalen Höhe eines Suchbaums zu gegebener Anzahl Schlüssel.

Untere Grenze Blätter



AVL Baum der Höhe 1 hat
 $N(1) := 2$ Blätter



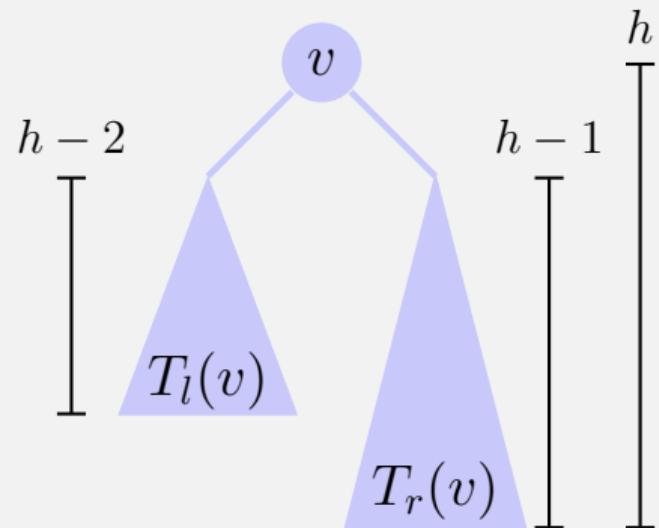
AVL Baum der Höhe 2 hat
mindestens $N(2) := 3$
Blätter

Untere Grenze Blätter für $h > 2$

- Höhe eines Teilbaums $\geq h - 1$.
- Höhe des anderen Teilbaums $\geq h - 2$.

Minimale Anzahl Blätter $N(h)$ ist

$$N(h) = N(h - 1) + N(h - 2)$$



Insgesamt gilt $N(h) = F_{h+2}$ mit **Fibonacci-Zahlen** $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 1$.

Fibonacci Zahlen, geschlossene Form

Es gilt²⁹

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i)$$

mit den Wurzeln $\phi, \hat{\phi}$ der Gleichung vom goldenen Schnitt
 $x^2 - x - 1 = 0$:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

$$\hat{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

²⁹ Herleitung mit Erzeugendenfunktionen (Potenzreihen) im Anhang

Fibonacci Zahlen, Induktiver Beweis

$$F_i \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i) \quad [*] \quad \left(\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right).$$

- 1 Klar für $i = 0, i = 1$.
- 2 Sei $i > 2$ und Behauptung $[*]$ wahr für alle $F_j, j < i$.

$$\begin{aligned} F_i &\stackrel{def}{=} F_{i-1} + F_{i-2} \stackrel{[*]}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-1} - \hat{\phi}^{i-1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-2} - \hat{\phi}^{i-2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-1} + \phi^{i-2}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{\phi}^{i-1} + \hat{\phi}^{i-2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{i-2}(\phi + 1) - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\phi}^{i-2}(\hat{\phi} + 1) \end{aligned}$$

($\phi, \hat{\phi}$ erfüllen $x + 1 = x^2$)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{i-2}(\phi^2) - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\phi}^{i-2}(\hat{\phi}^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i).$$

Baumhöhe

Da $|\hat{\phi}| < 1$, gilt insgesamt

$$N(h) \in \Theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^h\right) \subseteq \Omega(1.618^h)$$

und somit

$$\begin{aligned} N(h) &\geq c \cdot 1.618^h \\ \Rightarrow h &\leq 1.44 \log_2 n + c'. \end{aligned}$$

Ein AVL Baum ist asymptotisch nicht mehr als 44% höher als ein perfekt balancierter Baum.³⁰

³⁰ Ein perfekt balancierter Baum hat Höhe $\lceil \log_2 n + 1 \rceil$

Einfügen

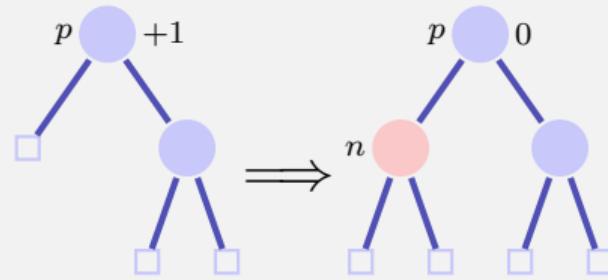
Balancieren

- Speichern der Balance für jeden Knoten
- Baum rebalancieren bei jeder Update-Operation

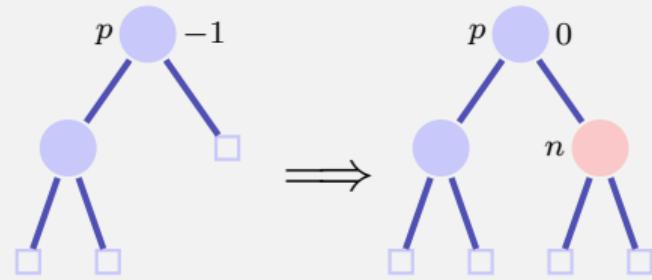
Neuer Knoten n wird eingefügt:

- Zuerst einfügen wie bei Suchbaum.
- Prüfe die Balance-Bedingung für alle Knoten aufsteigend von n zur Wurzel.

Balance am Einfügeort



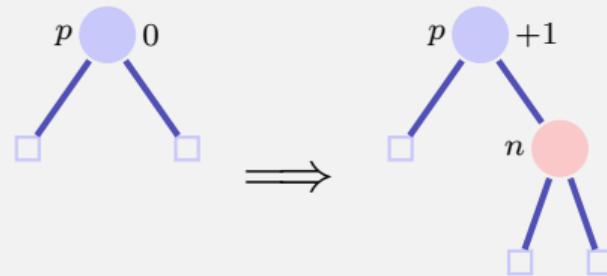
Fall 1: $\text{bal}(p) = +1$



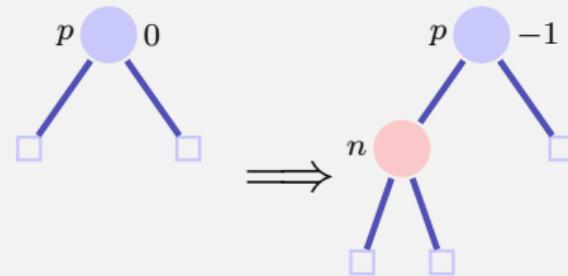
Fall 2: $\text{bal}(p) = -1$

Fertig in beiden Fällen, denn der Teilbaum ist nicht gewachsen.

Balance am Einfügeort



Fall 3.1: $\text{bal}(p) = 0$ rechts



Fall 3.2: $\text{bal}(p) = 0$, links

In beiden Fällen noch nicht fertig. Aufruf von `upin(p)`.

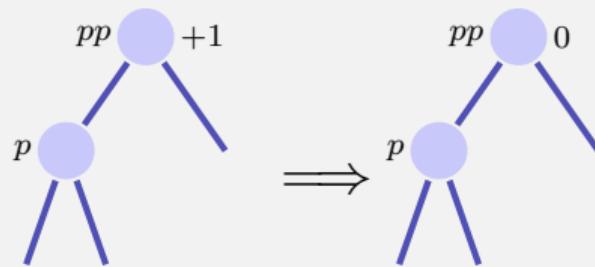
`upin(p)` - Invariante

Beim Aufruf von `upin(p)` gilt, dass

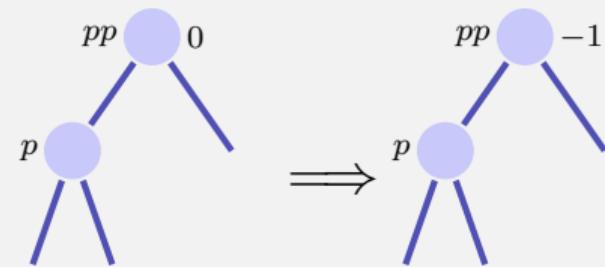
- der Teilbaum ab p gewachsen ist und
- $\text{bal}(p) \in \{-1, +1\}$

$\text{upin}(p)$

Annahme: p ist linker Sohn von pp^{31}



Fall 1: $\text{bal}(pp) = +1$, fertig.



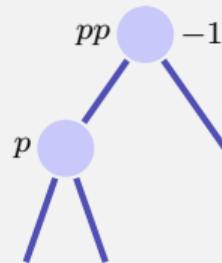
Fall 2: $\text{bal}(pp) = 0$, $\text{upin}(pp)$

In beiden Fällen gilt nach der Operation die AVL-Bedingung für den Teilbaum ab pp

³¹ Ist p rechter Sohn: symmetrische Fälle unter Vertauschung von $+1$ und -1

upin(p)

Annahme: p ist linker Sohn von pp



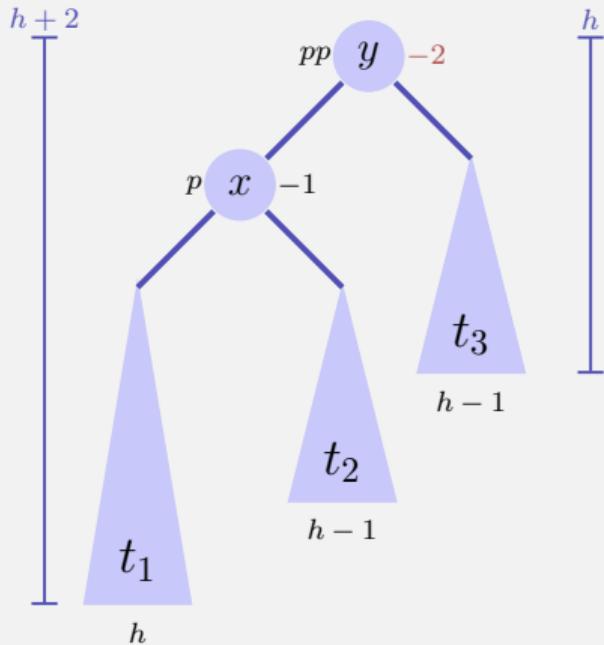
Fall 3: $\text{bal}(pp) = -1$,

Dieser Fall ist problematisch: das Hinzufügen von n im Teilbaum ab pp hat die AVL-Bedingung verletzt. Rebalancieren!

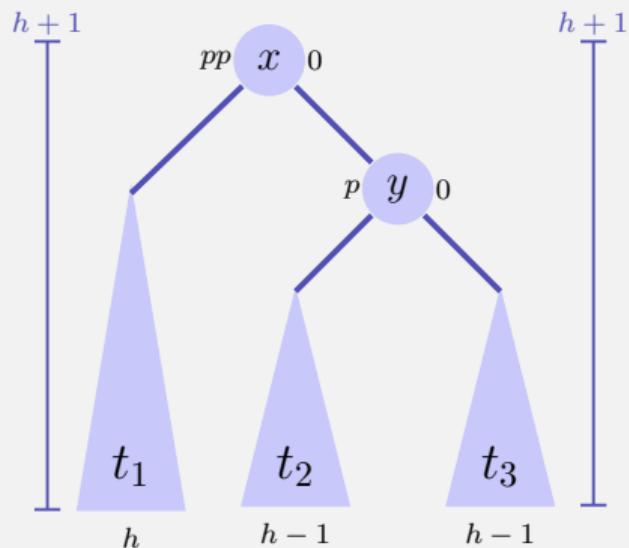
Zwei Fälle $\text{bal}(p) = -1$, $\text{bal}(p) = +1$

Rotationen

Fall 1.1 $\text{bal}(p) = -1$.³²



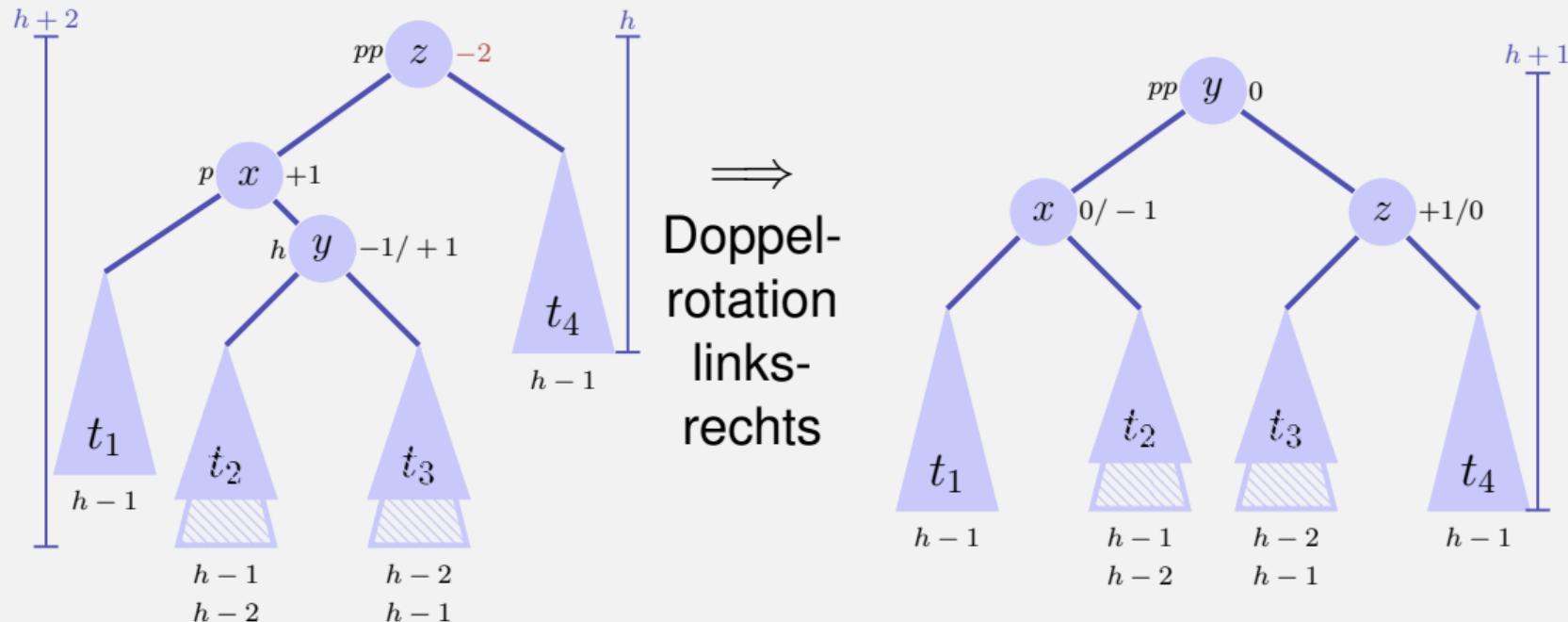
⇒
Rotation
nach
rechts



³² p rechter Sohn $\Rightarrow \text{bal}(pp) = \text{bal}(p) = +1$, Linksrotation

Rotationen

Fall 1.2 $\text{bal}(p) = +1$.³³



³³ p rechter Sohn $\Rightarrow \text{bal}(pp) = +1$, $\text{bal}(p) = -1$, Doppelrotation rechts links

Analyse

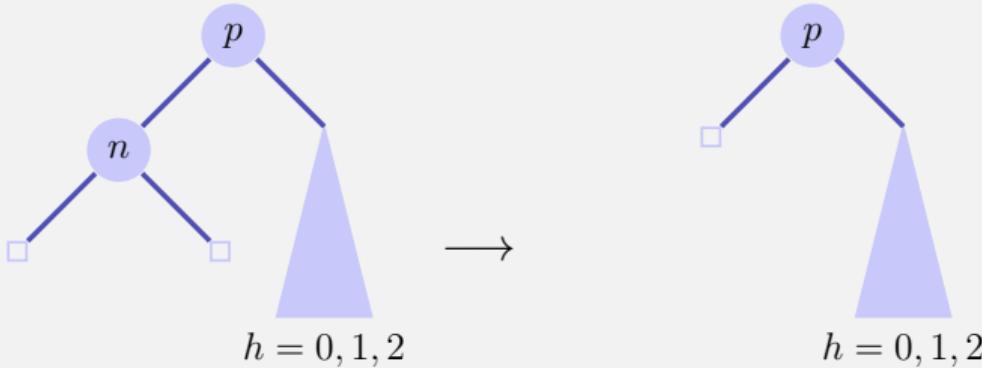
- Höhe des Baumes: $\mathcal{O}(\log n)$.
- Einfügen wie beim binären Suchbaum.
- Balancieren durch Rekursion vom Knoten zur Wurzel. Maximale Pfadlänge $\mathcal{O}(\log n)$.

Das Einfügen im AVL-Baum hat Laufzeitkosten von $\mathcal{O}(\log n)$.

Löschen

Fall 1: Knoten n hat zwei Blätter als Kinder Sei p Elternknoten von n .
⇒ Anderer Teilbaum hat Höhe $h' = 0, 1$ oder 2

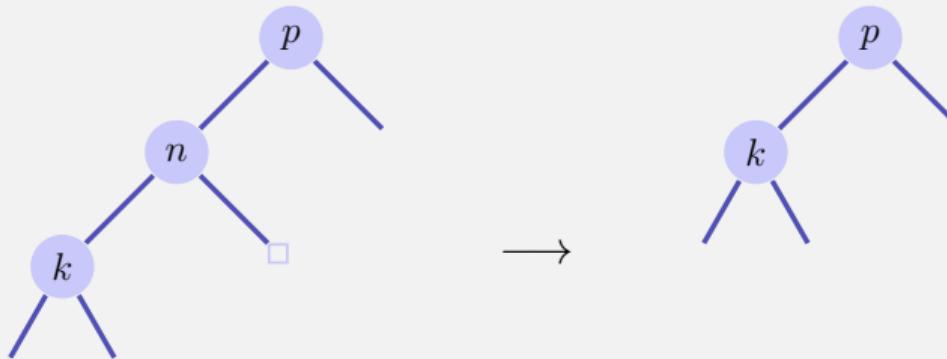
- $h' = 1$: $\text{bal}(p)$ anpassen.
- $h' = 0$: $\text{bal}(p)$ anpassen. Aufruf `upout(p)`.
- $h' = 2$: Rebalancieren des Teilbaumes. Aufruf `upout(p)`.



Löschen

Fall 2: Knoten n hat einen inneren Knoten k als Kind

- Ersetze n durch k . `upout(k)`



Löschen

Fall 3: Knoten n hat zwei inneren Knoten als Kinder

- Ersetze n durch symmetrischen Nachfolger. [upout\(k\)](#)
- Löschen des symmetrischen Nachfolgers wie in Fall 1 oder 2.

upout(p)

Sei pp der Elternknoten von p

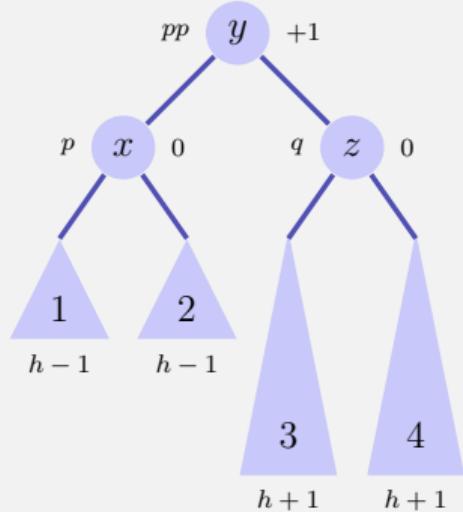
(a) p linkes Kind von pp

- 1 $\text{bal}(pp) = -1 \Rightarrow \text{bal}(pp) \leftarrow 0$. upout(pp)
- 2 $\text{bal}(pp) = 0 \Rightarrow \text{bal}(pp) \leftarrow +1$.
- 3 $\text{bal}(pp) = +1 \Rightarrow$ nächste Folien.

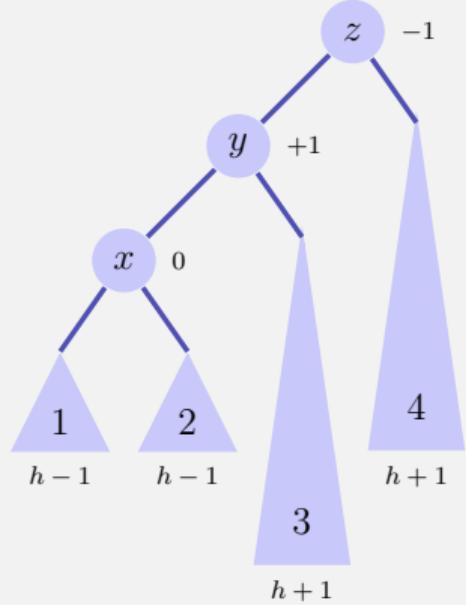
(b) p rechtes Kind von pp : Symmetrische Fälle unter Vertauschung von $+1$ und -1 .

upout(p)

Fall (a).3: $\text{bal}(pp) = +1$. Sei q Bruder von p
(a).3.1: $\text{bal}(q) = 0$.³⁴



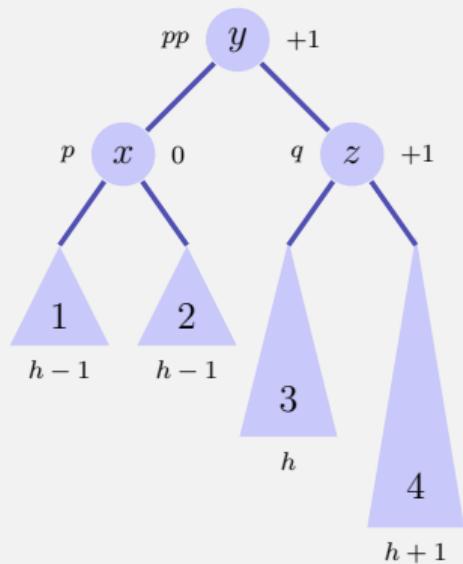
⇒
Linksrotation
(y)



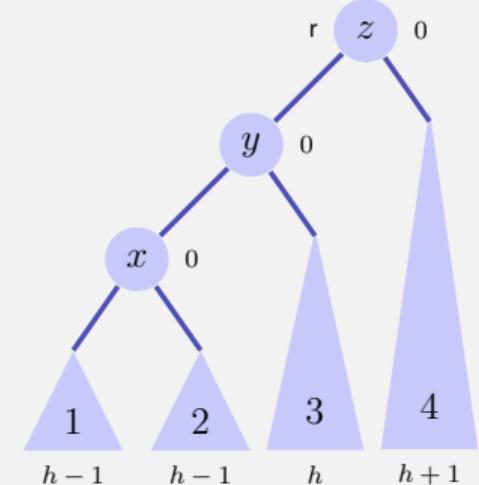
³⁴(b).3.1: $\text{bal}(pp) = -1$, $\text{bal}(q) = -1$, Rechtsrotation.

upout(p)

Fall (a).3: $\text{bal}(pp) = +1$. (a).3.2: $\text{bal}(q) = +1$.³⁵



⇒
Linksrotation
(y)

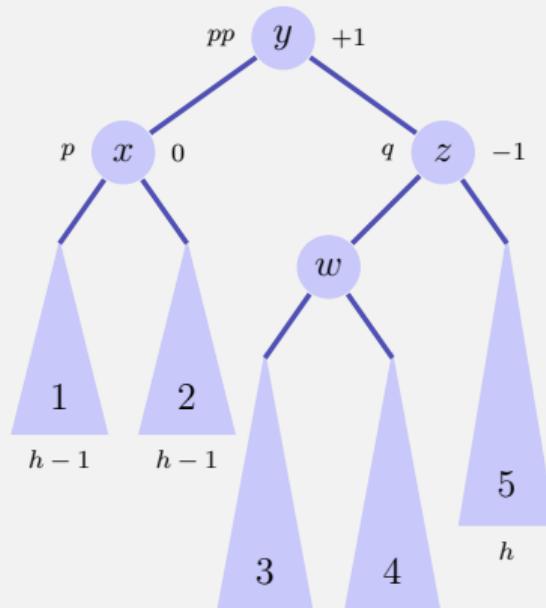


plus upout(r).

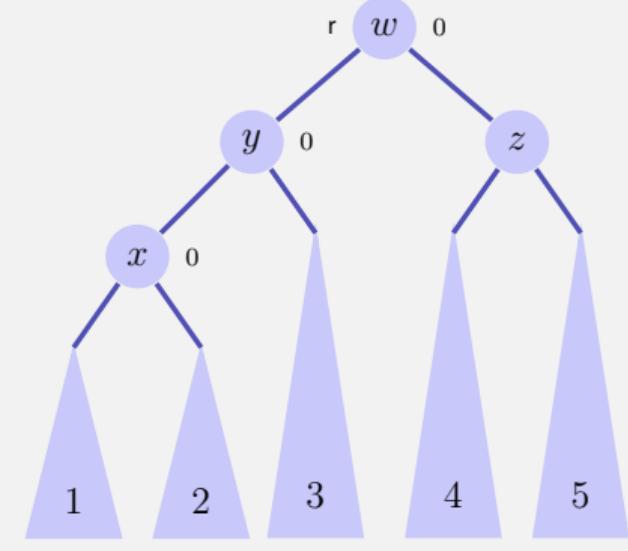
³⁵(b).3.2: $\text{bal}(pp) = -1$, $\text{bal}(q) = +1$, Rechtsrotation+upout

upout(p)

Fall (a).3: $\text{bal}(pp) = +1$. (a).3.3: $\text{bal}(q) = -1$.³⁶



⇒
Doppelrotation
rechts (z)
links (y)



plus upout(r).

³⁶(b).3.3: $\text{bal}(pp) = -1$, $\text{bal}(q) = -1$, Links-Rechts-Rotation + upout

Zusammenfassung

- AVL-Bäume haben asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(\log n)$ (schlechtester Fall) für das Suchen, Einfügen und Löschen von Schlüsseln
- Einfügen und Löschen ist verhältnismässig aufwändig und für kleine Probleme relativ langsam.

17.5 Anhang

Herleitung einiger mathematischen Formeln

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

Geschlossene Form der Fibonacci Zahlen: Berechnung über erzeugende Funktionen:

1 Potenzreihenansatz

$$f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} F_i \cdot x^i$$

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

- 2 Für Fibonacci Zahlen gilt $F_0 = 0$, $F_1 = 1$,
 $F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \forall i > 1$. Daher:

$$\begin{aligned}f(x) &= x + \sum_{i=2}^{\infty} F_i \cdot x^i = x + \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-1} \cdot x^i + \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-2} \cdot x^i \\&= x + x \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-1} \cdot x^{i-1} + x^2 \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-2} \cdot x^{i-2} \\&= x + x \sum_{i=0}^{\infty} F_i \cdot x^i + x^2 \sum_{i=0}^{\infty} F_i \cdot x^i \\&= x + x \cdot f(x) + x^2 \cdot f(x).\end{aligned}$$

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

3 Damit:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot (1 - x - x^2) &= x. \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2} = -\frac{x}{x^2 + x - 1} \end{aligned}$$

Mit den Wurzeln $-\phi$ und $-\hat{\phi}$ von $x^2 + x - 1$,

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6, \quad \hat{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.6.$$

gilt $\phi \cdot \hat{\phi} = -1$ und somit

$$f(x) = -\frac{x}{(x + \phi) \cdot (x + \hat{\phi})} = \frac{x}{(1 - \phi x) \cdot (1 - \hat{\phi} x)}$$

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

4 Es gilt:

$$(1 - \hat{\phi}x) - (1 - \phi x) = \sqrt{5} \cdot x.$$

Damit:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1 - \hat{\phi}x) - (1 - \phi x)}{(1 - \phi x) \cdot (1 - \hat{\phi}x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi x} - \frac{1}{1 - \hat{\phi}x} \right) \end{aligned}$$

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

- 5 Potenzreihenentwicklung von $g_a(x) = \frac{1}{1-a \cdot x}$ ($a \in \mathbb{R}$):

$$\frac{1}{1-a \cdot x} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \cdot x^i.$$

Sieht man mit Taylor-Entwicklung von $g_a(x)$ um $x = 0$ oder so: Sei $\sum_{i=0}^{\infty} G_i \cdot x^i$ eine Potenzreihenentwicklung von g . Mit der Identität $g_a(x)(1 - a \cdot x) = 1$ gilt für alle x (im Konvergenzradius)

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \cdot x^i - a \cdot \sum_{i=0}^{\infty} G_i \cdot x^{i+1} = G_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (G_i - a \cdot G_{i-1}) \cdot x^i$$

Für $x = 0$ folgt $G_0 = 1$ und für $x \neq 0$ folgt dann $G_i = a \cdot G_{i-1} \Rightarrow G_i = a^i$.

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

- 6 Einsetzen der Potenzreihenentwicklung:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi x} - \frac{1}{1 - \hat{\phi} x} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\phi}^i x^i \right) \\&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^i - \hat{\phi}^i) x^i\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \cdot x^i$ liefert

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^i - \hat{\phi}^i).$$