Datenstrukturen und Algorithmen

Übung 2

FS 2019

Programm von heute

1. Feedback letzte Übung
2. Wiederholung Theorie
   - Induktion
   - Analyse von Programmen
3. Programmieraufgabe

Landau-Notation

- Geben Sie eine korrekte, kompakte Definition der Menge $\Theta(f)$ analog zur Definition der Mengen $\mathcal{O}(f)$ und $\Omega(f)$.

Landau-Notation

- Geben Sie eine korrekte, kompakte Definition der Menge $\Theta(f)$ analog zur Definition der Mengen $\mathcal{O}(f)$ und $\Omega(f)$.
- $\Theta(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists a > 0,\ b > 0,\ n_0 \in \mathbb{N} : a \cdot f(n) \leq g(n) \leq b \cdot f(n)\ \forall n \geq n_0\}$

Landau-Notation

- Geben Sie eine korrekte, kompakte Definition der Menge $\Theta(f)$ analog zur Definition der Mengen $\mathcal{O}(f)$ und $\Omega(f)$.
- $\Theta(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists a > 0,\ b > 0,\ n_0 \in \mathbb{N} : a \cdot f(n) \leq g(n) \leq b \cdot f(n)\ \forall n \geq n_0\}$
- $\Theta(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c > 0,\ n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{c} \cdot f(n) \leq g(n) \leq c \cdot f(n)\ \forall n \geq n_0\}$

Landau-Notation

Beweisen oder widerlegen Sie, mit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

(a) $f \in \mathcal{O}(g)$ if and only if $g \in \Omega(f)$.

(e) $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$ for all constants $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

(g) If $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(g)$ and $f(n) := f_1(n) \cdot f_2(n)$, then $f \in \mathcal{O}(g)$.

Landau-Notation

Funktionen sortieren: wenn Funktion f links der Funktion g steht, dann $f \in \mathcal{O}(g)$.

$2^{16},\ \log(n^4),\ \log^8(n),\ \sqrt{n},\ n\log n,\ \binom{n}{3},\ n^5+n,\ \frac{2^n}{n^2},\ n!,\ n^n.$

Summe von Elementen in zweidimensionalem Feld

Probleme / Fragen?

2. Wiederholung Theorie

Induktion: Was wird gebraucht?

- Beweise Aussagen, z.B. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktion: Was wird gebraucht?

- Beweise Aussagen, z.B. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Induktionsanfang:
  - Die gegebene Gleichung bzw. Ungleichung stimmt für einen oder mehrere Basisfälle.
  - z.B.: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktion: Was wird gebraucht?

- Beweise Aussagen, z.B. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Induktionsanfang:
  - Die gegebene Gleichung bzw. Ungleichung stimmt für einen oder mehrere Basisfälle.
  - z.B.: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
- Induktionshypothese: Wir nehmen an, die Aussage stimmt für ein allgemeines n.

Induktion: Was wird gebraucht?

- Beweise Aussagen, z.B. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Induktionsanfang:
  - Die gegebene Gleichung bzw. Ungleichung stimmt für einen oder mehrere Basisfälle.
  - z.B.: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
- Induktionshypothese: Wir nehmen an, die Aussage stimmt für ein allgemeines n.
- Induktionsschritt ($n \to n+1$):
  - Aus der Gültigkeit der Aussage für n (Induktionshypothese) folgt die Gültigkeit für $n+1$.
  - z.B.: $\sum_{i=1}^{n+1} i = n+1+\sum_{i=1}^{n} = n+1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

Induktion: Beispiel

- Zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Induktion: Beispiel

- Zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.
- Induktionsanfang:
  $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} r^i = 1 = \frac{1-r^1}{1-r}$.

Induktion: Beispiel

- Zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.
- Induktionsanfang:
  $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} r^i = 1 = \frac{1-r^1}{1-r}$.
- Induktionsschritt $(n \to n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} r^i &= r^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} r^i \\ &= r^{n+1} + \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{r^{n+1} - r^{n+2} + 1 + r^{n+1}}{1-r} = \frac{1-r^{n+2}}{1-r}.\end{aligned}$$

[Übrigens ..]

Das lässt sich auch einfach direkt zeigen

$$\frac{r^{n+1}-1}{r-1} \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^{n} r^i$$

$$\begin{aligned}(r-1)\cdot\sum_{i=0}^{n} r^i &= \sum_{i=0}^{n} r^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} r^i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} r^i - \sum_{i=0}^{n} r^i = \sum_{i=0}^{n+1} r^i - 1 - \sum_{i=0}^{n} r^i \\ &= r^{n+1} - 1\end{aligned}$$

Analyse

Wie oft wird `f()` aufgerufen?

```
for(unsigned i = 1; i <= n/3; i += 3)
  for(unsigned j = 1; j <= i; ++j)
    f();
```

Analyse

Wie oft wird `f()` aufgerufen?

```
for(unsigned i = 1; i <= n/3; i += 3)
  for(unsigned j = 1; j <= i; ++j)
    f();
```

Das Code-Fragment ruft `f()` $\Theta(n^2)$ mal auf: die äußere Schleife wird $n/9$ mal durchlaufen, und die innere Schleife ruft `f()` i mal auf.

Analyse

Wie oft wird `f()` aufgerufen?

```
for(unsigned i = 0; i < n; ++i) {
  for(unsigned j = 100; j*j >= 1; --j)
    f();
  for(unsigned k = 1; k <= n; k *= 2)
    f();
}
```

Analyse

Wie oft wird `f()` aufgerufen?

```
for(unsigned i = 0; i < n; ++i) {
  for(unsigned j = 100; j*j >= 1; --j)
    f();
  for(unsigned k = 1; k <= n; k *= 2)
    f();
}
```

Wir können die erste innere Schleife ignorieren, weil sie `f()` nur konstant oft aufruft.

Analyse

Wie oft wird `f()` aufgerufen?

```
for(unsigned i = 0; i < n; ++i) {
  for(unsigned j = 100; j*j >= 1; --j)
    f();
  for(unsigned k = 1; k <= n; k *= 2)
    f();
}
```

Wir können die erste innere Schleife ignorieren, weil sie `f()` nur konstant oft aufruft.
Die zweite innere Schleife ruft `f()` $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$ mal auf, in Summe haben wir $\Theta(n \log(n))$ Aufrufe.

Analyse

Wie oft wird `f()` aufgerufen?

```
void g(unsigned n) {
  for (unsigned i = 0; i<n ; ++i) {
    g(i)
  }
  f();
}
```

Analyse

Wie oft wird `f()` aufgerufen?

```
void g(unsigned n) {
  for (unsigned i = 0; i<n ; ++i) {
    g(i)
  }
  f();
}
```

$T(0) = 1$

Analyse

Wie oft wird `f()` aufgerufen?

```
void g(unsigned n) {
  for (unsigned i = 0; i<n ; ++i) {
    g(i)
  }
  f();
}
```

$$T(0) = 1$$
$$T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

Analyse

Wie oft wird `f()` aufgerufen?

```
void g(unsigned n) {
  for (unsigned i = 0; i<n ; ++i) {
    g(i)
  }
  f();
}
```

$T(0) = 1$
$T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)$

n	0	1	2	3	4
$T(n)$	1	2	4	8	16

Analyse

Wie oft wird `f()` aufgerufen?

```
void g(unsigned n) {
  for (unsigned i = 0; i<n ; ++i) {
    g(i)
  }
  f();
}
```

$T(0) = 1$
$T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)$

n	0	1	2	3	4
$T(n)$	1	2	4	8	16

Hypothese: $T(n) = 2^n$.

Analyse

Wie oft wird `f()` aufgerufen?

```
void g(unsigned n) {
  for (unsigned i = 0; i<n ; ++i) {
    g(i)
  }
  f();
}
```

Hypothese: $T(n) = 2^n$.
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\ &= 1 + 2^n - 1 = 2^n \end{aligned}$$

3. Programmieraufgabe

Das Auswahlproblem

Eingabe

- Unsortiertes Array $A = (A_1, \ldots, A_n)$ paarweise verschiedener Werte
- Zahl $1 \leq k \leq n$.

Ausgabe: $A[i]$ mit $|\{j : A[j] < A[i]\}| = k - 1$

Spezialfälle

$k = 1$: Minimum: Algorithmus mit n Vergleichsoperationen trivial.
$k = n$: Maximum: Algorithmus mit n Vergleichsoperationen trivial.
$k = \lfloor n/2 \rfloor$: Median.

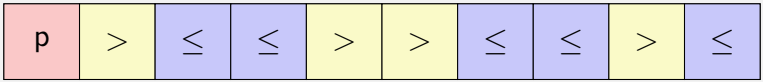
Pivotieren

Pivotieren

1. Wähle ein Element p als Pivotelement

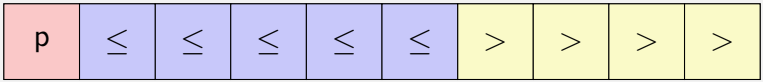
Pivotieren

1. Wähle ein Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, den Rang von p bestimmend.



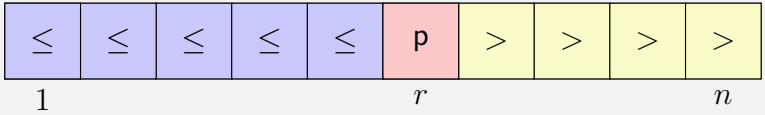
Pivotieren

1. Wähle ein Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, den Rang von p bestimmend.



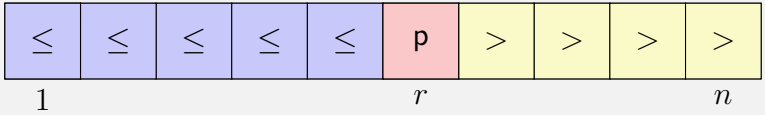
Pivotieren

1. Wähle ein Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, den Rang von p bestimmend.



Pivotieren

1. Wähle ein Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, den Rang von p bestimmend.
3. Rekursion auf dem relevanten Teil. Falls $k = r$, dann gefunden.



Algorithmus Partition($A[l..r], p$)

Input: Array A, welches den Sentinel p im Intervall $[l, r]$ mindestens einmal enthält.
Output: Array A partitioniert um p. Rückgabe der Position von p.

```
while l ≤ r do
    while A[l] < p do
        l ← l + 1
    while A[r] > p do
        r ← r − 1
    swap(A[l], A[r])
    if A[l] = A[r] then
        l ← l + 1
return l − 1
```

Algorithmus Quickselect ($A[l..r], k$)

Input: Array A der Länge n. Indizes $1 \leq l \leq k \leq r \leq n$, so dass für alle $x \in A[l..r] : |\{j|A[j] \leq x\}| \geq l$ und $|\{j|A[j] \leq x\}| \leq r$.

Output: Wert $x \in A[l..r]$ mit $|\{j|A[j] \leq x\}| \geq k$ und $|\{j|x \leq A[j]\}| \geq n - k + 1$

if l=r **then**
    return $A[l]$;

$x \leftarrow$ RandomPivot$(A[l..r])$
$m \leftarrow$ Partition$(A[l..r], x)$
if $i < m$ **then**
    return QuickSelect$(A[l..m-1], k)$
else if $i > m$ **then**
    return QuickSelect$(A[m+1..r], k)$
else
    return $A[l]$

Algorithmus RandomPivot ($A[l..r]$)

Input: Array A der Länge n. Indizes $1 \leq l \leq i \leq r \leq n$
Output: Zufälliger "guter" Pivot $x \in A[l..r]$
repeat
    wähle zufälligen Pivot $x \in A[l..r]$
    $p \leftarrow l$
    for $j = l$ **to** r **do**
        if $A[j] \leq x$ **then** $p \leftarrow p + 1$
until $\left\lfloor \frac{3l+r}{4} \right\rfloor \leq p \leq \left\lceil \frac{l+3r}{4} \right\rceil$
return x

Dieser Algorithmus ist nur von theoretischem Interesse und liefert im Erwartungswert nach 2 Durchläufen einen guten Pivot. Praktisch kann man im Algorithmus Quickselect direkt einen zufälligen Pivot uniformverteilt ziehen.

Fragen oder Anregungen?