Datenstrukturen und Algorithmen

Übung 12

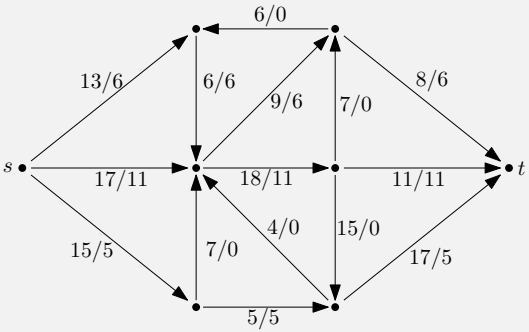
FS 2019

Programm von heute

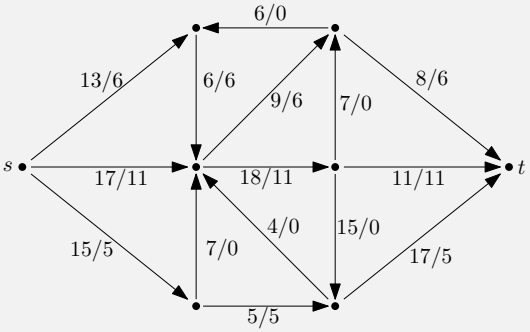
1. Feedback letzte Übung
2. MaxFlow
3. Zwei Quiz-Fragen
4. Parallele Programmierung
5. Programmieraufgaben

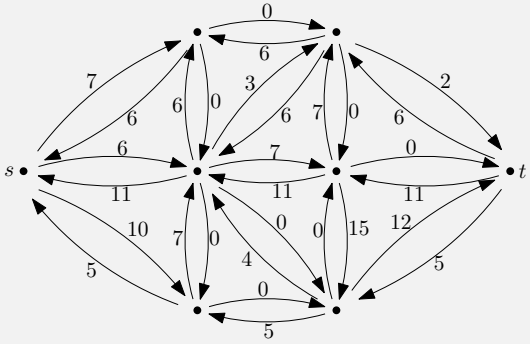
1. Feedback letzte Übung

Aufgabe Manual Max-Flow



Aufgabe Manual Max-Flow





Aufgabe Applying Maximum Flow

- Knotenkapazität: Knoten durch Eingangs- und Ausgangsknoten ersetzen.
- Verbinde Knoten durch Kante mit dieser Kapazität.

Aufgabe Union-Find

```
class UnionFind{
    std::vector<size_t> parents_;
public:
    UnionFind(size_t size) : parents_(size, size) { };

    size_t find(size_t index){
        while(parents_[index] != parents_.size())
            index = parents_[index];
        return index;
    }

    void unite(size_t a, size_t b){
        parents_[find(a)] = b;
    }
};
```

Aufgabe Kruskal

```
class Edge{
public:
    size_t u_, v_;
    int c_;
    Edge(size_t u, int v, int c) : u_(u), v_(v), c_(c) {}

    bool operator<(const Edge& other) const {
        return c_ < other.c_;
    }
};
```

Aufgabe Kruskal

```
std::vector<Edge> edges;

...

UnionFind uf(n_ + 1);
sort(edges.begin(), edges.end());
for(auto e : edges){
        size_t i=uf.find(e.u_);
        size_t j=uf.find(e.v_);
        if(i != j){
                out.addEdge(e);
                uf.unite(i, j);
        }
}
```

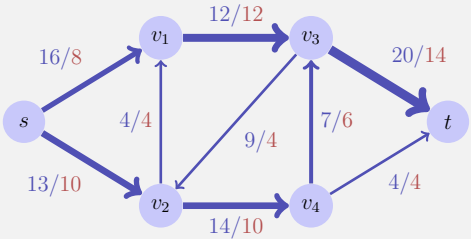
2. MaxFlow

Fluss

Ein *Fluss* $f : V \times V \to \mathbb{R}$ erfüllt folgende Bedingungen:

- *Kapazitätsbeschränkung*:
  Für alle $u, v \in V$: $f(u, v) \leq c(u, v)$.
- *Schiefsymmetrie*:
  Für alle $u, v \in V$: $f(u, v) = -f(v, u)$.
- *Flusserhaltung*:
  Für alle $u \in V \setminus \{s, t\}$:

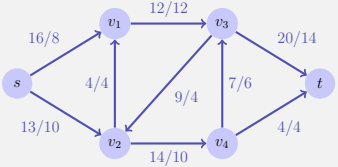
$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0.$$

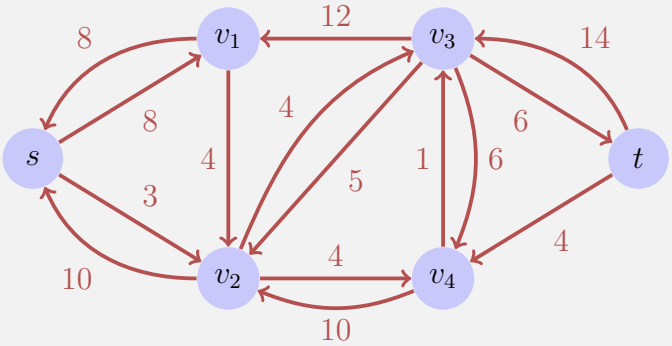


Wert w des Flusses:
$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$.
Hier $|f| = 18$.

Restnetzwerk

Restnetzwerk G_f gegeben durch alle Kanten mit Restkapazität:





Restnetzwerke haben dieselben Eigenschaften wie Flussnetzwerke, ausser dass antiparallele Kanten zugelassen sind.

Erweiterungspfade

Erweiterungspfad p: einfacher Pfad von s nach t im Restnetzwerk G_f.

Restkapazität $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ Kante in } p\}$

Max-Flow Min-Cut Theorem

Theorem

Wenn f ein Fluss in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ mit Quelle s und Senke t is, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist ein maximaler Fluss in G*
2. *Das Restnetzwerk G_f enthält keine Erweiterungspfade*
3. *Es gilt $|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T) von G.*

Algorithmus Ford-Fulkerson(G, s, t)

Input: Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$
Output: Maximaler Fluss f.

for $(u, v) \in E$ **do**
    $f(u, v) \leftarrow 0$

while Existiert Pfad $p : s \rightsquigarrow t$ im Restnetzwerk G_f **do**
    $c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$
    foreach $(u, v) \in p$ **do**
        if $(u, v) \in E$ **then**
            $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(p)$
        else
            $f(v, u) \leftarrow f(u, v) - c_f(p)$

Edmonds-Karp Algorithmus

Wähle in der Ford-Fulkerson-Methode zum Finden eines Pfades in G_f jeweils einen Erweiterungspfad kürzester Länge (z.B. durch Breitensuche).

Theorem

Wenn der Edmonds-Karp Algorithmus auf ein ganzzahliges Flussnetzwerk $G = (V, E)$ mit Quelle s und Senke t angewendet wird, dann ist die Gesamtanzahl der durch den Algorithmus angewendete Flusserhöhungen in $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$
$\Rightarrow$ Gesamte asymptotische Laufzeit: $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$

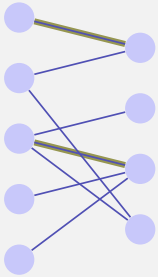
[Ohne Beweis]

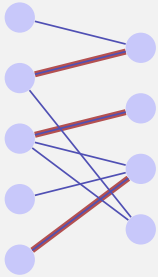
Anwendung: Maximales bipartites Matching

Gegeben: bipartiter ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

Matching M: $M \subseteq E$ so dass $|\{m \in M : v \in m\}| \leq 1$ für alle $v \in V$.

Maximales Matching M: Matching M, so dass $|M| \geq |M'|$ für jedes Matching M'.

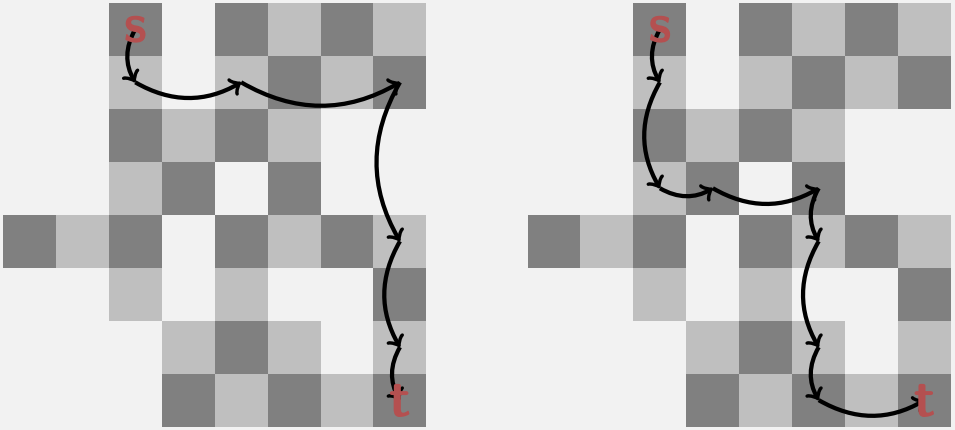




3. Zwei Quiz-Fragen

[Exam 2018.01], Aufgaben 4 und 5

Kürzeste Wege Frage



Wichtigste Frage: Was ist der dazugehörige Zustandsraum?

Max Flow Question

Wichtigste Frage: Wie bildet man das auf ein Max-Flow (Matching) Problem ab?

4. Parallele Programmierung

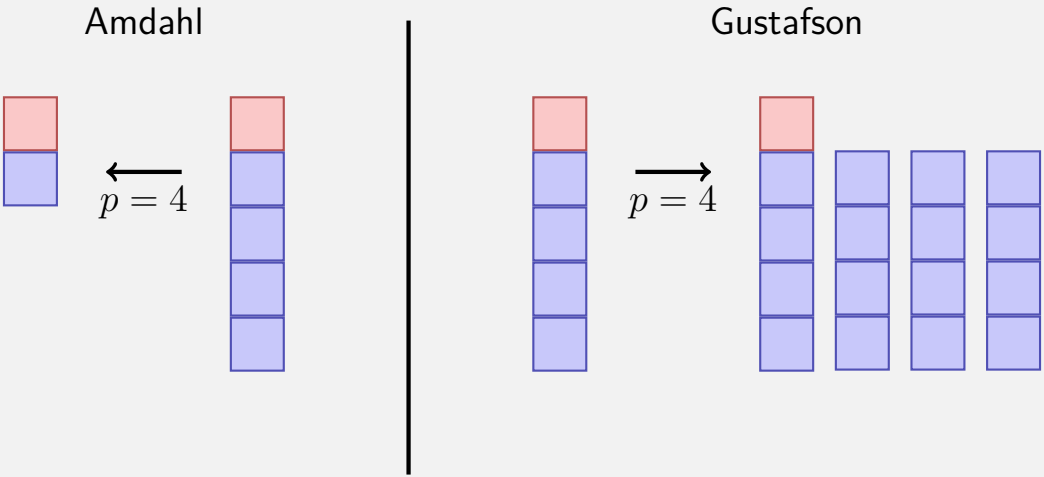
Speedup, Performanz und Effizienz

Gegeben

- fixierte Rechenarbeit W (Anzahl Rechenschritte)
- Sequentielle Ausführungszeit sei T_1
- Parallele Ausführungszeit T_p auf p CPUs

	Ausführungszeit	Speedup	Effizienz
Perfektion (linear)	$T_p = T_1/p$	$S_p = p$	$E_p = 1$
Verlust (sublinear)	$T_p > T_1/p$	$S_p < p$	$E_p < 1$
Hexerei (superlinear)	$T_p < T_1/p$	$S_p > p$	$E_p > 1$

Amdahl vs. Gustafson



Amdahl vs. Gustafson, or why do we care?

Amdahl	**Gustafson**
Pessimist	Optimist
starke Skalierung	schwache Skalierung

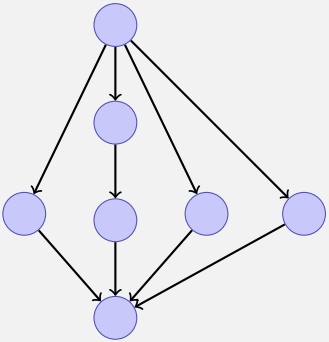
Amdahl vs. Gustafson, or why do we care?

Amdahl	**Gustafson**
Pessimist	Optimist
starke Skalierung	schwache Skalierung

$\Rightarrow$ Methoden müssen entwickelt werden so dass sie einen möglichst kleinen sequenziellen Anteil haben.

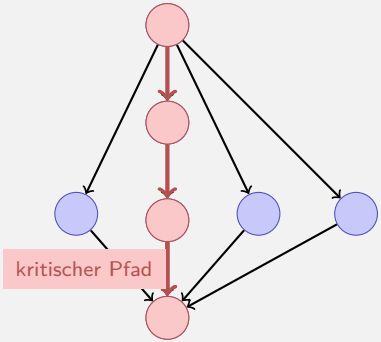
Frage

- Jeder Knoten (Task) benötigt 1 Zeiteinheit.
- Pfeile bezeichnen Abhängigkeiten.
- Minimale Ausführungseinheit wenn Anzahl Prozessoren $= \infty$?



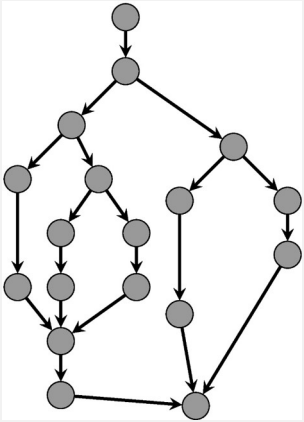
Frage

- Jeder Knoten (Task) benötigt 1 Zeiteinheit.
- Pfeile bezeichnen Abhängigkeiten.
- Minimale Ausführungseinheit wenn Anzahl Prozessoren $= \infty$?



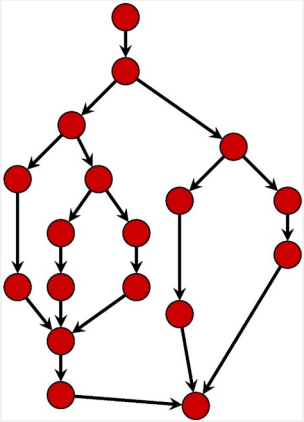
Performanzmodell

- p Prozessoren
- Dynamische Zuteilung
- T_p: Ausführungszeit auf p Prozessoren



Performanzmodell

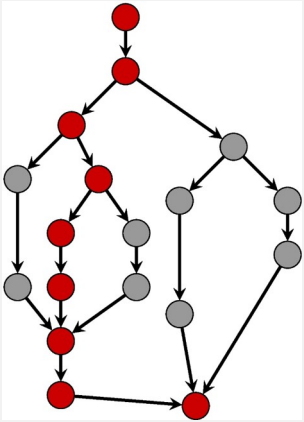
- T_p: Ausführungszeit auf p Prozessoren
- T_1: *Arbeit:* Zeit für die gesamte Berechnung auf einem Prozessor
- T_1/T_p: Speedup



Performanzmodell

- T_∞: *Zeitspanne*: Kritischer Pfad. Ausführungszeit auf ∞ Prozessoren. Längster Pfad von der Wurzel zur Senke.
- T_1/T_∞: *Parallelität:* breiter ist besser
- Untere Grenzen

$$T_p \geq T_1/p \quad \text{Arbeitsgesetz}$$
$$T_p \geq T_\infty \quad \text{Zeitspannengesetz}$$



Greedy Scheduler

Greedy Scheduler: teilt zu jeder Zeit so viele Tasks zu Prozessoren zu wie möglich.

Theorem

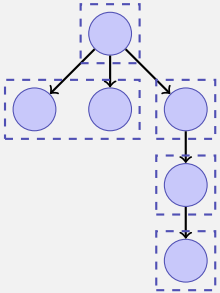
Auf einem idealen Parallelrechner mit p Prozessoren führt ein Greedy-Scheduler eine mehrfädige Berechnung mit Arbeit T_1 und Zeitspanne T_∞ in Zeit

$$T_p \leq T_1/p + T_\infty$$

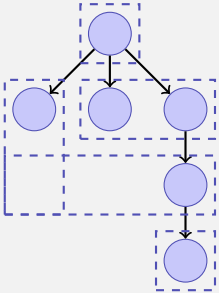
aus.

Beispiel

Annahme $p = 2$.



$T_p = 5$



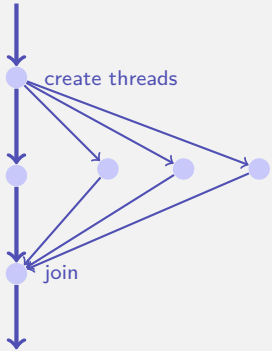
$T_p = 4$

5. Programmieraufgaben

C++11 Threads

```
void hello(int id){
  std::cout << "hello from " << id << "\n";
}

int main(){
  std::vector<std::thread> tv(3);
  int id = 0;
  for (auto & t:tv)
    t = std::thread(hello, ++id);
  std::cout << "hello from main \n";
  for (auto & t:tv)
       t.join();
  return 0;
}
```



Nichtdeterministische Ausführung!

Eine Ausführung:

```
hello from main
hello from 2
hello from 1
hello from 0
```

Andere Ausführung:

```
hello from 1
hello from main
hello from 0
hello from 2
```

Andere Ausführung:

```
hello from main
hello from 0
hello from hello from 1
2
```

Technische Details I

- Beim Erstellen von Threads werden auch Referenzparameter kopiert, ausser man gibt explizit std::ref bei der Konstruktion an.

Technische Details I

- Beim Erstellen von Threads werden auch Referenzparameter kopiert, ausser man gibt explizit std::ref bei der Konstruktion an.

```
void calc( std::vector<int>& very_long_vector ){
  // doing funky stuff with very_long_vector
}
int main(){
  std::vector<int> v( 1000000000 );
  std::thread t1( calc, v );          // bad idea, v is copied
  // here v is unchanged
  std::thread t2( calc, std::ref(v) ); // good idea, v is not copied
  // here v is modified
  std::thread t2( [&v]{calc(v)}; } ); // also good idea
  // here v is modified
  // ...
```

Technische Details II

- Threads können nicht kopiert werden.

Technische Details II

- Threads können nicht kopiert werden.

```
{
  std::thread t1(hello);
  std::thread t2;
  t2 = t1; // compiler error
  t1.join();
}
{
  std::thread t1(hello);
  std::thread t2;
  t2 = std::move(t1); // ok
  t2.join();
}
```

Fragen?