# 7. Sortieren I

Einfache Sortierverfahren



## 7.1 Einfaches Sortieren

Sortieren durch Auswahl, Sortieren durch Einfügen, Bubblesort
[Ottman/Widmayer, Kap. 2.1, Cormen et al, Kap. 2.1, 2.2, Exercise 2.2-2, Problem 2-2



## Problemstellung

**Eingabe:** Ein Array $A = (A[1], ..., A[n])$ der Länge $n$.

**Ausgabe:** Eine Permutation $A'$ von $A$, die sortiert ist: $A'[i] \leq A'[j]$ für alle $1 \leq i \leq j \leq n$.



## Algorithmus: IsSorted($A$)

**Input** : Array $A = (A[1], ..., A[n])$ der Länge $n$.
**Output** : Boolesche Entscheidung "sortiert" oder "nicht sortiert"

```
for i ← 1 to n − 1 do
    if A[i] > A[i + 1] then
        return "nicht sortiert";
return "sortiert";
```

## Beobachtung

IsSorted($A$):“nicht sortiert”, wenn $A[i] > A[i+1]$ für ein $i$.

$\Rightarrow$ Idee:

**for** $j \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  **if** $A[j] > A[j+1]$ **then**
    swap($A[j], A[j+1]$);



## Ausprobieren

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 2 | 8 | 4 | 1 | $(j=1)$ |
| 5 | 6 | 2 | 8 | 4 | 1 | $(j=2)$ |
| 5 | 2 | 6 | 8 | 4 | 1 | $(j=3)$ |
| 5 | 2 | 6 | 8 | 4 | 1 | $(j=4)$ |
| 5 | 2 | 6 | 4 | 8 | 1 | $(j=5)$ |
| 5 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 | |

- Nicht sortiert! ☹.
- Aber das grösste Element wandert ganz nach rechts.
  $\Rightarrow$ Neue Idee! ☺



## Ausprobieren

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 2 | 8 | 4 | 1 | $(j=1, i=1)$ |
| 5 | 6 | 2 | 8 | 4 | 1 | $(j=2)$ |
| 5 | 2 | 6 | 8 | 4 | 1 | $(j=3)$ |
| 5 | 2 | 6 | 8 | 4 | 1 | $(j=4)$ |
| 5 | 2 | 6 | 4 | 8 | 1 | $(j=5)$ |
| 5 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 | $(j=1, i=2)$ |
| 2 | 5 | 6 | 4 | 1 | 8 | $(j=2)$ |
| 2 | 5 | 6 | 4 | 1 | 8 | $(j=3)$ |
| 2 | 5 | 4 | 6 | 1 | 8 | $(j=4)$ |
| 2 | 5 | 4 | 1 | 6 | 8 | $(j=1, i=3)$ |
| 2 | 5 | 4 | 1 | 6 | 8 | $(j=2)$ |
| 2 | 4 | 5 | 1 | 6 | 8 | $(j=3)$ |
| 2 | 4 | 1 | 5 | 6 | 8 | $(j=1, i=4)$ |
| 2 | 4 | 1 | 5 | 6 | 8 | $(j=2)$ |
| 2 | 1 | 4 | 5 | 6 | 8 | $(i=1, j=5)$ |
| 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | |

- Wende das Verfahren iterativ an.
- Für $A[1,\dots,n]$, dann $A[1,\dots,n-1]$, dann $A[1,\dots,n-2]$, etc.



## Algorithmus: Bubblesort

**Input :** Array $A = (A[1],\dots,A[n])$, $n \geq 0$.
**Output :** Sortiertes Array $A$
**for** $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  **for** $j \leftarrow 1$ **to** $n-i$ **do**
    **if** $A[j] > A[j+1]$ **then**
      swap($A[j], A[j+1]$);

## Analyse

Anzahl Schlüsselvergleiche $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)$.

Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall: $\Theta(n^2)$

? Was ist der schlechteste Fall?

! Wenn A absteigend sortiert ist.

? Algorithmus kann so angepasst werden, dass er dann abbricht, wenn das Array sortiert ist. Schlüsselvergleiche und Vertauschungen des modifizierten Algorithmus im besten Fall?

! Schlüsselvergleiche = $n-1$. Vertauschungen = 0.



## Sortieren durch Auswahl

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 2 | 8 | 4 | 1 | $(i=1)$ |
| 1 | 6 | 2 | 8 | 4 | 5 | $(i=2)$ |
| 1 | 2 | 6 | 8 | 4 | 5 | $(i=3)$ |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 6 | 5 | $(i=4)$ |
| 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | $(i=5)$ |
| 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | $(i=6)$ |
| 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | |

- Iteratives Vorgehen wie bei Bubblesort.
- Auswahl des kleinsten (oder grössten) Elementes durch direkte Suche.



## Algorithmus: Sortieren durch Auswahl

**Input** : Array $A = (A[1], \dots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output** : Sortiertes Array $A$

**for** $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
    $p \leftarrow i$
    **for** $j \leftarrow i+1$ **to** $n$ **do**
        **if** $A[j] < A[p]$ **then**
            $p \leftarrow j$;
    swap($A[i], A[p]$)



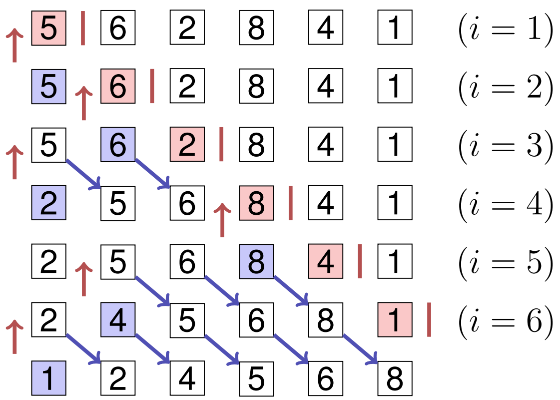
## Analyse

Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall: $\Theta(n^2)$.

Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall: $n-1 = \Theta(n)$

Anzahl Vergleiche im besten Fall: $\Theta(n^2)$.

## Sortieren durch Einfügen




- Iteratives Vorgehen: $i = 1...n$
- Einfügeposition für Element $i$ bestimmen.
- Element $i$ einfügen, ggfs. Verschiebung nötig.



## Sortieren durch Einfügen

? Welchen Nachteil hat der Algorithmus im Vergleich zum Sortieren durch Auswahl?

! Im schlechtesten Fall viele Elementverschiebungen.

? Welchen Vorteil hat der Algorithmus im Vergleich zum Sortieren durch Auswahl?

! Der Suchbereich (Einfügebereich) ist bereits sortiert. Konsequenz: binäre Suche möglich.



## Algorithmus: Sortieren durch Einfügen

**Input :** Array $A = (A[1], \ldots, A[n])$, $n \geq 0$.
**Output :** Sortiertes Array $A$

**for** $i \leftarrow 2$ **to** $n$ **do**
  $x \leftarrow A[i]$
  $p \leftarrow$ BinarySearch($A[1...i-1], x$); // Kleinstes $p \in [1, i]$ mit $A[p] \geq x$
  **for** $j \leftarrow i - 1$ **downto** $p$ **do**
    $A[j+1] \leftarrow A[j]$
  $A[p] \leftarrow x$



## Analyse

Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall:
$\sum_{k=1}^{n-1} a \cdot \log k = a \log((n-1)!) \in \mathcal{O}(n \log n)$.

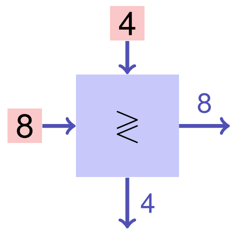
Anzahl Vergleiche im besten Fall: $\Theta(n \log n)$.[4]

Anzahl Vertauschungen im schlechtesten Fall: $\sum_{k=2}^{n} (k-1) \in \Theta(n^2)$

[4] Mit leichter Anpassung der Funktion BinarySearch für das Minimum / Maximum: $\Theta(n)$

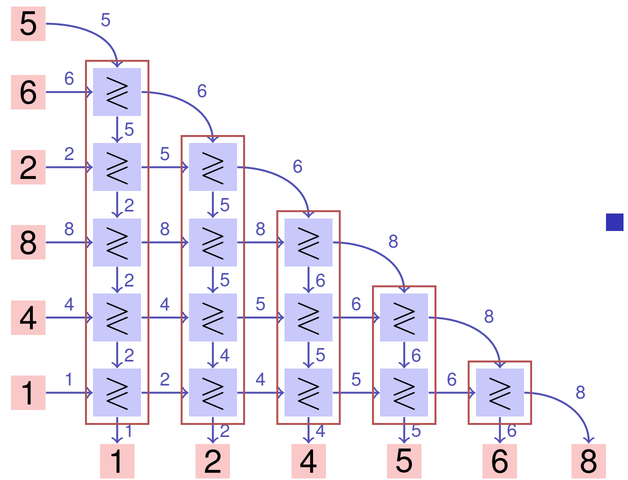
## Anderer Blickwinkel

Sortierknoten:





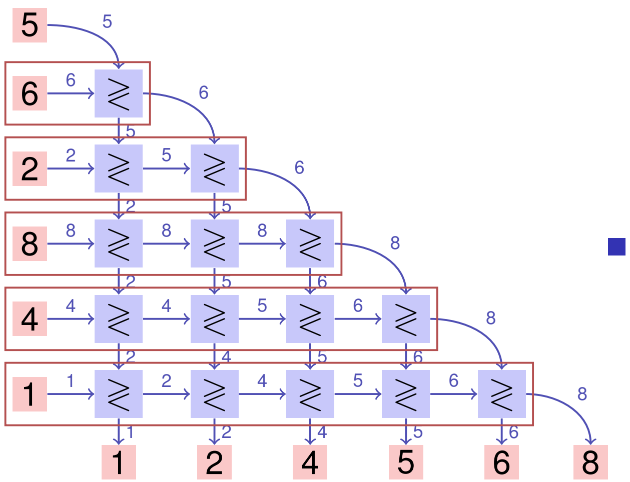

## Anderer Blickwinkel




- Wie Selection Sort [und wie Bubble Sort]



## Anderer Blickwinkel




- Wie Insertion Sort



## Schlussfolgerung

Selection Sort, Bubble Sort und Insertion Sort sind in gewissem Sinne dieselben Sortieralgorithmen. Wird später präzisiert. [5]

[5] Im Teil über parallele Sortiernetzwerke. Für sequentiellen Code gelten natürlich weiterhin die zuvor gemachten Feststellungen.

## Shellsort

Insertion Sort auf Teilfolgen der Form $(A_{k\cdot i})$ $(i \in \mathbb{N})$ mit absteigenden Abständen $k$. Letzte Länge ist zwingend $k = 1$.

Gute Folgen: z.B. Folgen mit Abständen $k \in \{2^i 3^j | 0 \leq i, j\}$.



## Shellsort

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
| 1 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 9 | 0 | insertion sort, $k = 4$ |
| 1 | 0 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 9 | 8 | |
| 1 | 0 | 3 | 6 | 5 | 4 | 7 | 2 | 9 | 8 | |
| 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 | 9 | 8 | |
| 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 | 9 | 8 | insertion sort, $k = 2$ |
| 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 | 9 | 8 | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | insertion sort, $k = 1$ |



# 8. Sortieren II

Heapsort, Quicksort, Mergesort



## 8.1 Heapsort

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.3, Cormen et al, Kap. 6]

# Heapsort

Inspiration von Selectsort: Schnelles Einfügen

Inspiration von Insertionsort: Schnelles Finden der Position

? Können wir das beste der beiden Welten haben?

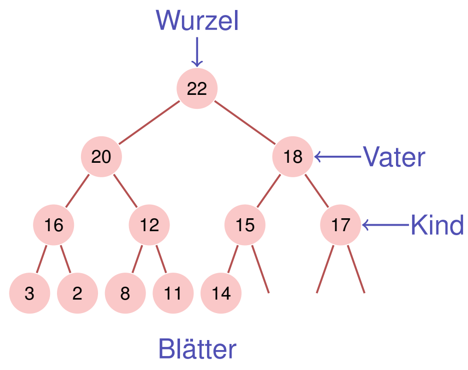
! Ja, aber nicht ganz so einfach...



# [Max-]Heap[6]

Binärer Baum mit folgenden Eigenschaften

1. vollständig, bis auf die letzte Ebene
2. Lücken des Baumes in der letzten Ebene höchstens rechts.
3. *Heap-Bedingung:*
   Max-(Min-)Heap: Schlüssel eines Kindes kleiner (grösser) als der des Vaters



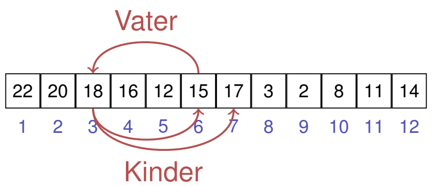

[6] Heap (Datenstruktur), nicht: wie in "Heap und Stack" (Speicherallokation)

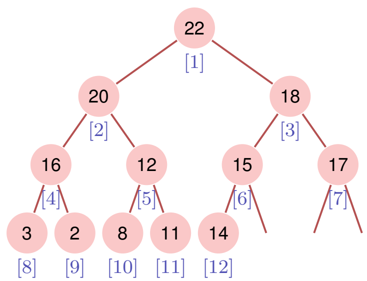


# Heap und Array

Baum $\rightarrow$ Array:

- Kinder$(i) = \{2i, 2i+1\}$
- Vater$(i) = \lfloor i/2 \rfloor$



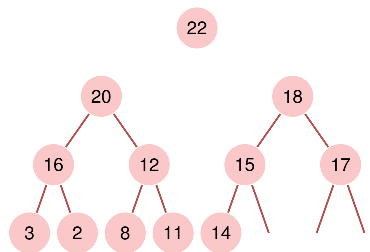

Abhängig von Startindex![7]

[7] Für Arrays, die bei $0$ beginnen: $\{2i, 2i+1\} \rightarrow \{2i+1, 2i+2\}$, $\lfloor i/2 \rfloor \rightarrow \lfloor (i-1)/2 \rfloor$



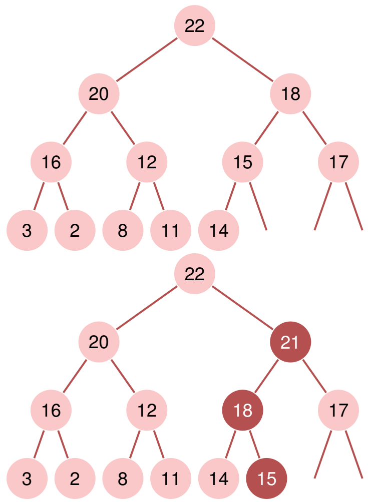
# Rekursive Heap-Struktur

Ein Heap besteht aus zwei Teilheaps:



# Einfügen

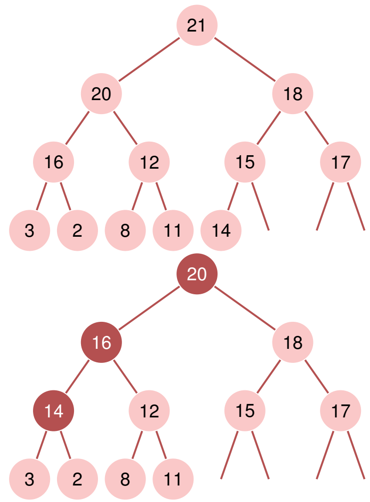
- Füge neues Element an erste freie Stelle ein. Verletzt Heap Eigenschaft potentiell.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Aufsteigen.
- Anzahl Operationen im schlechtesten Fall: $\mathcal{O}(\log n)$






# Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Absinken (in Richtung des grösseren Kindes).
- Anzahl Operationen im schlechtesten Fall: $\mathcal{O}(\log n)$






# Algorithmus Versickern($A, i, m$)

**Input :** Array $A$ mit Heapstruktur für die Kinder von $i$. Letztes Element $m$.
**Output :** Array $A$ mit Heapstruktur für $i$ mit letztem Element $m$.

**while** $2i \leq m$ **do**
  $j \leftarrow 2i$; // $j$ linkes Kind
  **if** $j < m$ and $A[j] < A[j+1]$ **then**
    $j \leftarrow j+1$; // $j$ rechtes Kind mit grösserem Schlüssel
  **if** $A[i] < A[j]$ **then**
    swap($A[i], A[j]$)
    $i \leftarrow j$; // weiter versickern
  **else**
    $i \leftarrow m$; // versickern beendet



# Heap Sortieren

$A[1, ..., n]$ ist Heap.
Solange $n > 1$

- swap($A[1], A[n]$)
- Versickere($A, 1, n-1$);
- $n \leftarrow n - 1$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 7 | 6 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| Tauschen | $\Rightarrow$ | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | 7 |
| Versickern | $\Rightarrow$ | 6 | 5 | 4 | 2 | 1 | 7 |
| Tauschen | $\Rightarrow$ | 1 | 5 | 4 | 2 | 6 | 7 |
| Versickern | $\Rightarrow$ | 5 | 4 | 2 | 1 | 6 | 7 |
| Tauschen | $\Rightarrow$ | 1 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 |
| Versickern | $\Rightarrow$ | 4 | 1 | 2 | 5 | 6 | 7 |
| Tauschen | $\Rightarrow$ | 2 | 1 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Versickern | $\Rightarrow$ | 2 | 1 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Tauschen | $\Rightarrow$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 |

## Heap erstellen

Beobachtung: Jedes Blatt eines Heaps ist für sich schon ein korrekter Heap.

Folgerung: Induktion von unten!



## Algorithmus HeapSort($A, n$)

**Input** : Array $A$ der Länge $n$.
**Output** : $A$ sortiert.
// Heap Bauen.
**for** $i \leftarrow n/2$ **downto** $1$ **do**
  Versickere($A, i, n$);
// Nun ist $A$ ein Heap.
**for** $i \leftarrow n$ **downto** $2$ **do**
  swap($A[1], A[i]$)
  Versickere($A, 1, i-1$)
// Nun ist $A$ sortiert.



## Analyse: Sortieren eines Heaps

Versickere durchläuft maximal $\log n$ Knoten. An jedem Knoten $2$ Schlüsselvergleiche. $\Rightarrow$ Heap Sortieren kostet im schlechtesten Fall $2n \log n$ Vergleiche.

Anzahl der Bewegungen vom Heap Sortieren auch $\mathcal{O}(n \log n)$.



## Analyse: Heap bauen

Aufrufe an Versickern: $n/2$. Also Anzahl Vergleiche und Bewegungen $v(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$.

Versickerpfade aber im Mittel viel kürzer, also sogar:

$$v(n) = \sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil \cdot c \cdot h \in \mathcal{O}(n \sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{h}{2^h})$$

mit $s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (0 < x < 1)$ [8] und $s(\frac{1}{2}) = 2$:

$$v(n) \in \mathcal{O}(n).$$

[8] $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 ... \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + ...$

## 8.2 Mergesort

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.4, Cormen et al, Kap. 2.3],



## Zwischenstand

Heapsort: $\mathcal{O}(n \log n)$ Vergleiche und Bewegungen.

**?** Nachteile von Heapsort?

- **!** Wenig Lokalität: per Definition springt Heapsort im sortierten Array umher (Negativer Cache Effekt).
- **!** Zwei Vergleiche vor jeder benötigten Bewegung.



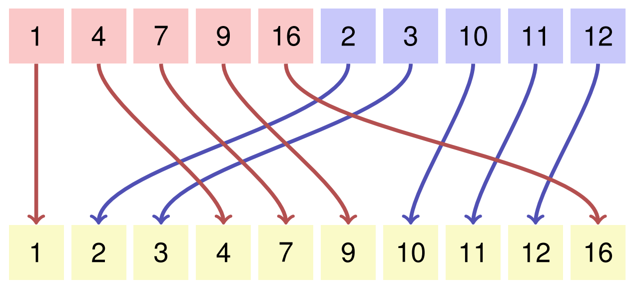
## Mergesort (Sortieren durch Verschmelzen)

Divide and Conquer!

- Annahme: Zwei Hälften eines Arrays $A$ bereits sortiert.
- Folgerung: Minimum von $A$ kann mit 2 Vergleichen ermittelt werden.
- Iterativ: Sortierung des so vorsortierten $A$ in $\mathcal{O}(n)$.



## Merge



# Algorithmus Merge($A, l, m, r$)

**Input :** Array $A$ der Länge $n$, Indizes $1 \le l \le m \le r \le n$. $A[l, \dots, m]$, $A[m+1, \dots, r]$ sortiert
**Output :** $A[l, \dots, r]$ sortiert

```
1 B ← new Array(r − l + 1)
2 i ← l; j ← m + 1; k ← 1
3 while i ≤ m and j ≤ r do
4     if A[i] ≤ A[j] then B[k] ← A[i]; i ← i + 1
5     else B[k] ← A[j]; j ← j + 1
6     k ← k + 1;
7 while i ≤ m do B[k] ← A[i]; i ← i + 1; k ← k + 1
8 while j ≤ r do B[k] ← A[j]; j ← j + 1; k ← k + 1
9 for k ← l to r do A[k] ← B[k − l + 1]
```



# Korrektheit

Hypothese: Nach $k$ Durchläufen der Schleife von Zeile 3 ist $B[1, \dots, k]$ sortiert und $B[k] \le A[i]$, falls $i \le m$ und $B[k] \le A[j]$ falls $j \le r$.

Beweis per Induktion:
*Induktionsanfang:* Das leere Array $B[1, \dots, 0]$ ist trivialerweise sortiert.
*Induktionsschluss* ($k \to k+1$):

- oBdA $A[i] \le A[j]$, $i \le m, j \le r$.
- $B[1, \dots, k]$ ist nach Hypothese sortiert und $B[k] \le A[i]$.
- Nach $B[k+1] \leftarrow A[i]$ ist $B[1, \dots, k+1]$ sortiert.
- $B[k+1] = A[i] \le A[i+1]$ (falls $i+1 \le m$) und $B[k+1] \le A[j]$ falls $j \le r$.
- $k \leftarrow k+1, i \leftarrow i+1$: Aussage gilt erneut.



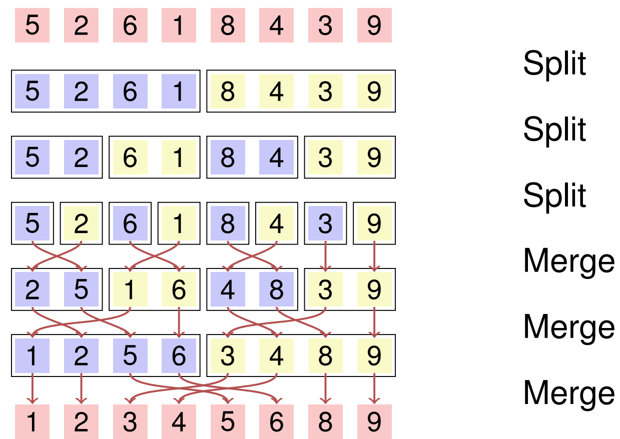
# Analyse (Merge)

**Lemma**
*Wenn: Array $A$ der Länge $n$, Indizes $1 \le l < r \le n$. $m = \lfloor (l+r)/2 \rfloor$ und $A[l, \dots, m]$, $A[m+1, \dots, r]$ sortiert.*
*Dann: im Aufruf Merge($A, l, m, r$) werden $\Theta(r - l)$ viele Schlüsselbewegungen und Vergleiche durchgeführt.*

Beweis: (Inspektion des Algorithmus und Zählen der Operationen).



# Mergesort



## Algorithmus Rekursives 2-Wege Mergesort($A, l, r$)

**Input** : Array $A$ der Länge $n$. $1 \leq l \leq r \leq n$
**Output** : Array $A[l, \dots, r]$ sortiert.

**if** $l < r$ **then**
    $m \leftarrow \lfloor (l+r)/2 \rfloor$ // Mittlere Position
    Mergesort($A, l, m$) // Sortiere vordere Hälfte
    Mergesort($A, m+1, r$) // Sortiere hintere Hälfte
    Merge($A, l, m, r$) // Verschmelzen der Teilfolgen



## Analyse

Rekursionsgleichung für die Anzahl Vergleiche und Schlüsselbewegungen:

$$C(n) = C(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) + C(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + \Theta(n) \in \Theta(n \log n)$$



## Algorithmus StraightMergesort($A$)

*Rekursion vermeiden:* Verschmelze Folgen der Länge $1, 2, 4...$ direkt

**Input** : Array $A$ der Länge $n$
**Output** : Array $A$ sortiert

$length \leftarrow 1$
**while** $length < n$ **do** // Iteriere über die Längen $n$
    $r \leftarrow 0$
    **while** $r + length < n$ **do** // Iteriere über die Teilfolgen
        $l \leftarrow r + 1$
        $m \leftarrow l + length - 1$
        $r \leftarrow \min(m + length, n)$
        Merge($A, l, m, r$)
    $length \leftarrow length \cdot 2$



## Analyse

Wie rekursives Mergesort führt reines 2-Wege-Mergesort immer $\Theta(n \log n)$ viele Schlüsselvergleiche und -bewegungen aus.

# Natürliches 2-Wege Mergesort

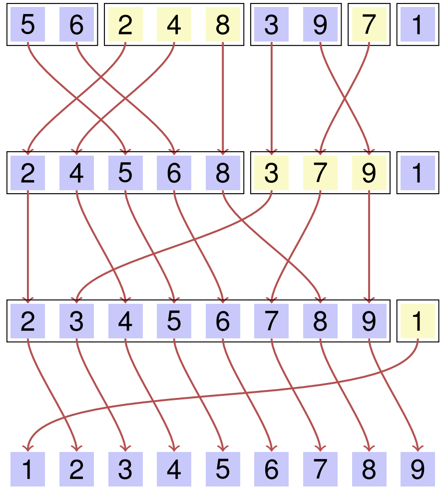
Beobachtung: Obige Varianten nutzen nicht aus, wenn vorsortiert ist und führen immer $\Theta(n \log n)$ viele Bewegungen aus.

? Wie kann man teilweise vorsortierte Folgen besser sortieren?

! Rekursives Verschmelzen von bereits vorsortierten Teilen (*Runs*) *von* $A$.



# Natürliches 2-Wege Mergesort






# Algorithmus NaturalMergesort($A$)

**Input** : Array $A$ der Länge $n > 0$
**Output** : Array $A$ sortiert
**repeat**
  $r \leftarrow 0$
  **while** $r < n$ **do**
    $l \leftarrow r + 1$
    $m \leftarrow l$; **while** $m < n$ **and** $A[m+1] \geq A[m]$ **do** $m \leftarrow m + 1$
    **if** $m < n$ **then**
      $r \leftarrow m + 1$; **while** $r < n$ **and** $A[r+1] \geq A[r]$ **do** $r \leftarrow r + 1$
      Merge$(A, l, m, r)$;
    **else**
      $r \leftarrow n$
**until** $l = 1$



# Analyse

Im besten Fall führt natürliches Mergesort nur $n - 1$ Vergleiche durch!

? Ist es auch im Mittel asymptotisch besser als StraightMergesort?

! Nein. Unter Annahme der Gleichverteilung der paarweise unterschiedlichen Schlüssel haben wir im Mittel $n/2$ Stellen $i$ mit $k_i > k_{i+1}$, also $n/2$ Runs und sparen uns lediglich einen Durchlauf, also $n$ Vergleiche.

Natürliches Mergesort führt im schlechtesten und durchschnittlichen Fall $\Theta(n \log n)$ viele Vergleiche und Bewegungen aus.

# 8.3 Quicksort

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.2, Cormen et al, Kap. 7]



## Quicksort

ⓘ Was ist der Nachteil von Mergesort?

ⓘ Benötigt $\Theta(n)$ Speicherplatz für das Verschmelzen.

ⓘ Wie könnte man das Verschmelzen einsparen?

ⓘ Sorge dafür, dass jedes Element im linken Teil kleiner ist als im rechten Teil.

ⓘ Wie?

ⓘ Pivotieren und Aufteilen!



## Quicksort (willkürlicher Pivot)

$2 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \quad \boxed{3} \quad 7 \quad 9 \quad 1$

$\boxed{2} \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \quad \boxed{5} \quad 7 \quad 9 \quad 4$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \quad \boxed{7} \quad 9 \quad 6$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad \boxed{8}$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$



## Algorithmus Quicksort($A[l, \ldots, r]$

**Input :** Array $A$ der Länge $n$. $1 \leq l \leq r \leq n$.
**Output :** Array $A$, sortiert zwischen $l$ und $r$.
**if** $l < r$ **then**
  Wähle Pivot $p \in A[l, \ldots, r]$
  $k \leftarrow$ Partition$(A[l, \ldots, r], p)$
  Quicksort$(A[l, \ldots, k-1])$
  Quicksort$(A[k+1, \ldots, r])$

# Zur Erinnerung: Algorithmus Partition($A[l, \dots, r], p$)

**Input :** Array $A$, welches den Pivot $p$ im Intervall $[l, r]$ mindestens einmal enthält.
**Output :** Array $A$ partitioniert um $p$. Rückgabe der Position von $p$.

```
while l ≤ r do
    while A[l] < p do
        l ← l + 1
    while A[r] > p do
        r ← r − 1
    swap(A[l], A[r])
    if A[l] = A[r] then          // Nur für nicht paarweise verschiedene Schlüssel
        l ← l + 1
return l-1
```



# Analyse: Anzahl Vergleiche

*Bester Fall.* Pivotelement = Median; Anzahl Vergleiche:

$$T(n) = 2T(n/2) + c \cdot n, \; T(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$$

*Schlechtester Fall.* Pivotelement = Minimum oder Maximum; Anzahl Vergleiche:

$$T(n) = T(n-1) + c \cdot n, \; T(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(n) \in \Theta(n^2)$$



# Analyse: Anzahl Vertauschungen

Resultat eines Aufrufes an Partition (Pivot 3):

2 1 3 6 8 5 7 9 4

? Wie viele Vertauschungen haben hier maximal stattgefunden?

! 2. Die maximale Anzahl an Vertauschungen ist gegeben durch die Anzahl Schlüssel im kleineren Bereich.



# Analyse: Anzahl Vertauschungen

*Gedankenspiel*

- Jeder Schlüssel aus dem kleineren Bereich zahlt bei einer Vertauschung eine Münze.
- Wenn ein Schlüssel eine Münze gezahlt hat, ist der Bereich, in dem er sich befindet maximal halb so gross wie zuvor.
- Jeder Schlüssel muss also maximal $\log n$ Münzen zahlen. Es gibt aber nur $n$ Schlüssel.

*Folgerung:* Es ergeben sich $\mathcal{O}(n \log n)$ viele Schlüsselvertauschungen im schlechtesten Fall!

## Randomisiertes Quicksort

Quicksort wird trotz $\Theta(n^2)$ Laufzeit im schlechtesten Fall oft eingesetzt.

Grund: Quadratische Laufzeit unwahrscheinlich, sofern die Wahl des Pivots und die Vorsortierung nicht eine ungünstige Konstellation aufweisen.

Vermeidung: Zufälliges Ziehen eines Pivots. Mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus $[l, r]$.



## Analyse (Randomisiertes Quicksort)

Erwartete Anzahl verglichener Schlüssel bei Eingabe der Länge $n$:

$$T(n) = (n-1) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(T(k-1) + T(n-k)\right), \; T(0) = T(1) = 0$$

Behauptung $T(n) \leq 4n \log n$.

Beweis per Induktion:
*Induktionsanfang:* klar für $n = 0$ (mit $0 \log 0 := 0$) und für $n = 1$.
*Hypothese:* $T(n) \leq 4n \log n$ für ein $n$.
*Induktionsschritt:* $(n - 1 \to n)$



## Analyse (Randomisiertes Quicksort)

$$\begin{aligned}
T(n) &= n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T(k) \overset{\mathsf{H}}{\leq} n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 4k \log k \\
&= n - 1 + \sum_{k=1}^{n/2} 4k \underbrace{\log k}_{\leq \log n - 1} + \sum_{k=n/2+1}^{n-1} 4k \underbrace{\log k}_{\leq \log n} \\
&\leq n - 1 + \frac{8}{n}\left((\log n - 1)\sum_{k=1}^{n/2} k + \log n \sum_{k=n/2+1}^{n-1} k\right) \\
&= n - 1 + \frac{8}{n}\left((\log n) \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{4}\left(\frac{n}{2} + 1\right)\right) \\
&= 4n \log n - 4 \log n - 3 \leq 4n \log n
\end{aligned}$$



## Analyse (Randomisiertes Quicksort)

**Theorem**
*Im Mittel benötigt randomisiertes Quicksort $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ Vergleiche.*

## Praktische Anmerkungen

Rekursionstiefe im schlechtesten Fall: $n - 1$[9]. Dann auch Speicherplatzbedarf $\mathcal{O}(n)$.

Kann vermieden werden: Rekursion nur auf dem kleineren Teil. Dann garantiert $\mathcal{O}(\log n)$ Rekursionstiefe und Speicherplatzbedarf.

[9] Stack-Overflow möglich!



## Quicksort mit logarithmischem Speicherplatz

**Input** : Array $A$ der Länge $n$. $1 \le l \le r \le n$.
**Output** : Array $A$, sortiert zwischen $l$ und $r$.

```
while l < r do
    Wähle Pivot p ∈ A[l,...,r]
    k ← Partition(A[l,...,r], p)
    if k − l < r − k then
        Quicksort(A[l,...,k − 1])
        l ← k + 1
    else
        Quicksort(A[k + 1,...,r])
        r ← k − 1
```

Der im ursprünglichen Algorithmus verbleibende Aufruf an Quicksort($A[l, \dots, r]$) geschieht iterativ (Tail Recursion ausgenutzt!): die If-Anweisung wurde zur While Anweisung.



## Praktische Anmerkungen

Für den Pivot wird in der Praxis oft der Median von drei Elementen genommen. Beispiel: Median3($A[l], A[r], A[\lfloor l + r/2 \rfloor]$).

Es existiert eine Variante von Quicksort mit konstanten Speicherplatzbedarf. Idee: Zwischenspeichern des alten Pivots am Ort des neuen Pivots.