4. Suchen

Lineare Suche, Binäre Suche, Interpolationssuche, Untere Schranken [Ottman/Widmayer, Kap. 3.2, Cormen et al, Kap. 2: Problems 2.1-3,2.2-3,2.3-5]

Das Suchproblem

Gegeben

- Menge von Datensätzen.

Beispiele

Telefonverzeichnis, Wörterbuch, Symboltabelle

- Jeder Datensatz hat einen Schlüssel k.
- Schlüssel sind vergleichbar: eindeutige Antwort auf Frage $k_1 \leq k_2$ für Schlüssel k_1, k_2.

Aufgabe: finde Datensatz nach Schlüssel k.

Das Auswahlproblem

Gegeben

- Menge von Datensätzen mit vergleichbaren Schlüsseln k.

Gesucht: Datensatz, mit dem kleinsten, grössten, mittleren Schlüssel. Allgemein: finde Datensatz mit i-kleinstem Schlüssel.

Suche in Array

Gegeben

- Array A mit n Elementen $(A[1], \dots, A[n])$.
- Schlüssel b

Gesucht: Index k, $1 \le k \le n$ mit $A[k] = b$ oder ”nicht gefunden”.

22	20	32	10	35	24	42	38	28	41
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- *Bestenfalls* 1 Vergleich.

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- *Bestenfalls* 1 Vergleich.
- *Schlimmstenfalls* n Vergleiche.

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- *Bestenfalls* 1 Vergleich.
- *Schlimmstenfalls* n Vergleiche.
- Annahme: Jede Anordnung der n Schlüssel ist gleichwahrscheinlich. *Erwartete* Anzahl Vergleiche:

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- *Bestenfalls* 1 Vergleich.
- *Schlimmstenfalls* n Vergleiche.
- Annahme: Jede Anordnung der n Schlüssel ist gleichwahrscheinlich. *Erwartete* Anzahl Vergleiche:

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- *Bestenfalls* 1 Vergleich.
- *Schlimmstenfalls* n Vergleiche.
- Annahme: Jede Anordnung der n Schlüssel ist gleichwahrscheinlich. *Erwartete* Anzahl Vergleiche:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}.$$

Suche in sortierten Array

Gegeben

- Sortiertes Array A mit n Elementen $(A[1], \dots, A[n])$ mit $A[1] \leq A[2] \leq \cdots \leq A[n]$.
- Schlüssel b

Gesucht: Index k, $1 \leq k \leq n$ mit $A[k] = b$ oder "nicht gefunden".

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$b < 28$

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$b < 28$

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$b > 20$

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 28$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 20$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 22$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 28$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 20$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 22$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 24$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 28$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 20$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b > 22$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	$b < 24$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42	erfolglos
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Binärer Suchalgorithmus BSearch$(A[l..r], b)$

Input : Sortiertes Array A von n Schlüsseln. Schlüssel b. Bereichsgrenzen $1 \leq l \leq r \leq n$ oder $l > r$ beliebig.
Output : Index des gefundenen Elements. 0, wenn erfolglos.

$m \leftarrow \lfloor (l+r)/2 \rfloor$
if $l > r$ **then** // erfolglose Suche
  return *NotFound*
else if $b = A[m]$ **then**// gefunden
  return m
else if $b < A[m]$ **then**// Element liegt links
  return BSearch$(A[l..m-1], b)$
else // $b > A[m]$: Element liegt rechts
  return BSearch$(A[m+1..r], b)$

Analyse (Schlimmster Fall)

Rekurrenz ($n = 2^k$)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Teleskopieren:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + c$$

Analyse (Schlimmster Fall)

Rekurrenz ($n = 2^k$)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Teleskopieren:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + c = T\left(\frac{n}{4}\right) + 2c$$

Analyse (Schlimmster Fall)

Rekurrenz ($n = 2^k$)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Teleskopieren:

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + c = T\left(\frac{n}{4}\right) + 2c \\ &= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + i \cdot c \end{aligned}$$

Analyse (Schlimmster Fall)

Rekurrenz ($n = 2^k$)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Teleskopieren:

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + c = T\left(\frac{n}{4}\right) + 2c \\ &= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + i \cdot c \\ &= T\left(\frac{n}{n}\right) + c \cdot \log_2 n = d + c \cdot \log_2 n \end{aligned}$$

Analyse (Schlimmster Fall)

Rekurrenz ($n = 2^k$)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Teleskopieren:

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + c = T\left(\frac{n}{4}\right) + 2c \\ &= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + i \cdot c \\ &= T\left(\frac{n}{n}\right) + c \cdot \log_2 n = d + c \cdot \log_2 n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Annahme: $T(n) = d + c \log_2 n$

Analyse (Schlimmster Fall)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Vermutung : $T(n) = d + c \cdot \log_2 n$

Beweis durch Induktion:

Analyse (Schlimmster Fall)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Vermutung : $T(n) = d + c \cdot \log_2 n$

Beweis durch Induktion:

- Induktionsanfang: $T(1) = d$.

Analyse (Schlimmster Fall)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Vermutung : $T(n) = d + c \cdot \log_2 n$

Beweis durch Induktion:

- Induktionsanfang: $T(1) = d$.
- Hypothese: $T(n/2) = d + c \cdot \log_2 n/2$

Analyse (Schlimmster Fall)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Vermutung : $T(n) = d + c \cdot \log_2 n$

Beweis durch Induktion:

- Induktionsanfang: $T(1) = d$.
- Hypothese: $T(n/2) = d + c \cdot \log_2 n/2$
- Schritt $(n/2 \to n)$

$$T(n) = T(n/2) + c = d + c \cdot (\log_2 n - 1) + c = d + c \log_2 n.$$

Resultat

Theorem

Der Algorithmus zur binären sortierten Suche benötigt $\Theta(\log n)$ *Elementarschritte.*

Iterativer binärer Suchalgorithmus

Input : Sortiertes Array A von n Schlüsseln. Schlüssel b.
Output : Index des gefundenen Elements. 0, wenn erfolglos.

```
l ← 1; r ← n
while l ≤ r do
    m ← ⌊(l + r)/2⌋
    if A[m] = b then
        return m
    else if A[m] < b then
        l ← m + 1
    else
        r ← m − 1
return NotFound;
```

Korrektheit

Algorithmus bricht nur ab, falls $A[l..r]$ leer oder b gefunden.

Invariante: Falls b in A, dann im Bereich $A[l..r]$

Beweis durch Induktion

- Induktionsanfang: $b \in A[1..n]$ (oder nicht)
- Hypothese: Invariante gilt nach i Schritten
- Schritt:
  $b < A[m] \Rightarrow b \in A[l..m-1]$
  $b > A[m] \Rightarrow b \in A[m+1..r]$

Geht es noch besser?

Geht es noch besser?

Annahme: Gleichverteilung der *Werte* im Array.

Geht es noch besser?

Annahme: Gleichverteilung der *Werte* im Array.

Beispiel

Name ”Becker” würde man im Telefonbuch vorne suchen.
”Wawrinka" wohl ziemlich weit hinten.

Geht es noch besser?

Annahme: Gleichverteilung der *Werte* im Array.

Beispiel

Name ”Becker” würde man im Telefonbuch vorne suchen.
”Wawrinka" wohl ziemlich weit hinten.
Binäre Suche vergleicht immer zuerst mit der Mitte.

Binäre Suche setzt immer $m = \left\lfloor l + \frac{r-l}{2} \right\rfloor$.

Interpolationssuche

Erwartete relative Position von b im Suchintervall $[l, r]$

$$\rho = \frac{b - A[l]}{A[r] - A[l]} \in [0, 1].$$

Neue "Mitte": $l + \rho \cdot (r - l)$

Anzahl Vergleiche im Mittel $\mathcal{O}(\log \log n)$ (ohne Beweis).

Interpolationssuche

Erwartete relative Position von b im Suchintervall $[l, r]$

$$\rho = \frac{b - A[l]}{A[r] - A[l]} \in [0, 1].$$

Neue "Mitte": $l + \rho \cdot (r - l)$

Anzahl Vergleiche im Mittel $\mathcal{O}(\log \log n)$ (ohne Beweis).

? Ist Interpolationssuche also immer zu bevorzugen?

Interpolationssuche

Erwartete relative Position von b im Suchintervall $[l, r]$

$$\rho = \frac{b - A[l]}{A[r] - A[l]} \in [0, 1].$$

Neue "Mitte": $l + \rho \cdot (r - l)$

Anzahl Vergleiche im Mittel $\mathcal{O}(\log \log n)$ (ohne Beweis).

? Ist Interpolationssuche also immer zu bevorzugen?

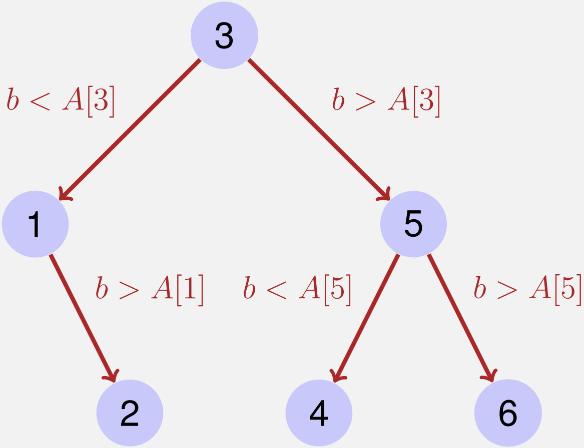
! Nein: Anzahl Vergleiche im schlimmsten Fall $\Omega(n)$.

Untere Schranke

Binäre Suche (im schlechtesten Fall): $\Theta(\log n)$ viele Vergleiche.

Gilt für *jeden* Suchalgorithms in sortiertem Array (im schlechtesten Fall): Anzahl Vergleiche = $\Omega(\log n)$?

Entscheidungsbaum



- Für jede Eingabe $b = A[i]$ muss Algorithmus erfolgreich sein $\Rightarrow$ Baum enthält mindestens n Knoten.
- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall = Höhe des Baumes = maximale Anzahl Knoten von Wurzel zu Blatt.

Entscheidungsbaum

Binärer Baum der Höhe h hat höchstens
$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{h-1} = 2^h - 1 < 2^h$ Knoten.

Entscheidungsbaum

Binärer Baum der Höhe h hat höchstens
$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{h-1} = 2^h - 1 < 2^h$ Knoten.

$$2^h > n \Rightarrow h > \log_2 n$$

Entscheidungsbaum mit n Knoten hat mindestens Höhe $\log_2 n$.

Entscheidungsbaum

Binärer Baum der Höhe h hat höchstens
$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{h-1} = 2^h - 1 < 2^h$ Knoten.

$$2^h > n \Rightarrow h > \log_2 n$$

Entscheidungsbaum mit n Knoten hat mindestens Höhe $\log_2 n$.

Anzahl Entscheidungen = $\Omega(\log n)$.

Theorem

Jeder Algorithmus zur Suche in sortierten Daten der Länge n benötigt im schlechtesten Fall $\Omega(\log n)$ Vergleichsschritte.

Untere Schranke für Suchen in unsortiertem Array

Theorem

Jeder Algorithmus zur Suche in unsortierten Daten der Länge n benötigt im schlechtesten Fall $\Omega(n)$ Vergleichsschritte.

Versuch

Korrekt?

"Beweis": Um b in A zu finden, muss b mit jedem Element $A[i]$ $(1 \leq i \leq n)$ verglichen werden.

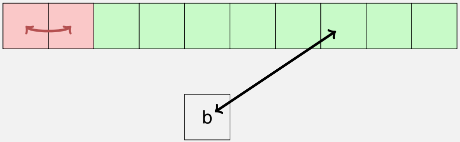
Versuch

? Korrekt?

”Beweis”: Um b in A zu finden, muss b mit jedem Element $A[i]$ $(1 \leq i \leq n)$ verglichen werden.

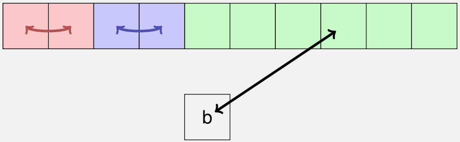
! Falsch! Vergleiche zwischen Elementen von A möglich!

Besseres Argument



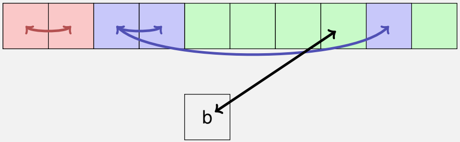
- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.

Besseres Argument



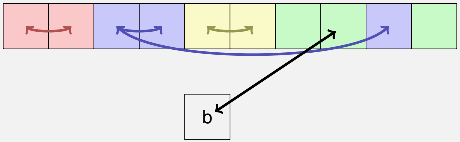
- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.

Besseres Argument



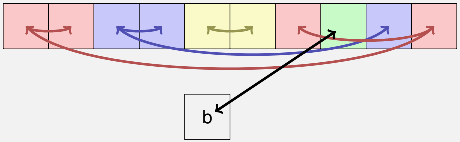
- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.

Besseres Argument



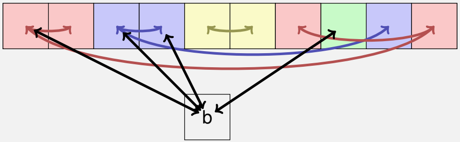
- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.

Besseres Argument



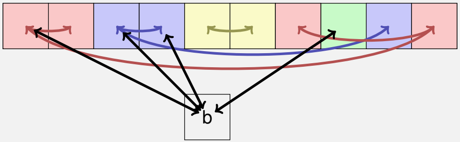
- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.

Besseres Argument



- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.
- Mindestens ein Element pro Gruppe muss mit b verglichen werden: $e \geq g$.

Besseres Argument



- Unterteilung der Vergleiche: Anzahl Vergleiche mit b : e Anzahl Vergleiche untereinander ohne b: i
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial: $g = n$.
- Vereinigen zweier Gruppen benötigt mindestens einen (internen Vergleich: $n - g \leq i$.
- Mindestens ein Element pro Gruppe muss mit b verglichen werden: $e \geq g$.
- Anzahl Vergleiche $i + e \geq n - g + g = n$. ∎

5. Auswählen

Das Auswahlproblem, Randomisierte Berechnung des Medians, Lineare Worst-Case Auswahl [Ottman/Widmayer, Kap. 3.1, Cormen et al, Kap. 9]

Min und Max

? Separates Finden von Minimum und Maximum in $(A[1], \ldots, A[n])$ benötigt insgesamt $2n$ Vergleiche. (Wie) geht es mit weniger als $2n$ Vergleichen für beide gemeinsam?

Min und Max

? Separates Finden von Minimum und Maximum in $(A[1], \ldots, A[n])$ benötigt insgesamt $2n$ Vergleiche. (Wie) geht es mit weniger als $2n$ Vergleichen für beide gemeinsam?

! Es geht mit $\frac{3}{2}n$ Vergleichen: Vergleiche jeweils 2 Elemente und deren kleineres mit Min und grösseres mit Max.

Das Auswahlproblem

Eingabe

- Unsortiertes Array $A = (A_1, \dots, A_n)$ paarweise verschiedener Werte
- Zahl $1 \leq k \leq n$.

Ausgabe: $A[i]$ mit $|\{j : A[j] < A[i]\}| = k - 1$

Spezialfälle

$k = 1$: Minimum: Algorithmus mit n Vergleichsoperationen trivial.
$k = n$: Maximum: Algorithmus mit n Vergleichsoperationen trivial.
$k = \lfloor n/2 \rfloor$: Median.

Ansätze

Ansätze

- Wiederholt das Minimum entfernen / auslesen: $\mathcal{O}(k \cdot n)$.
  Median: $\mathcal{O}(n^2)$

Ansätze

- Wiederholt das Minimum entfernen / auslesen: $\mathcal{O}(k \cdot n)$. Median: $\mathcal{O}(n^2)$
- Sortieren (kommt bald): $\mathcal{O}(n \log n)$

Ansätze

- Wiederholt das Minimum entfernen / auslesen: $\mathcal{O}(k \cdot n)$. Median: $\mathcal{O}(n^2)$
- Sortieren (kommt bald): $\mathcal{O}(n \log n)$
- Pivotieren $\mathcal{O}(n)$!

Pivotieren

Pivotieren

1. Wähle ein Element p als Pivotelement

p									

Pivotieren

1. Wähle ein Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, den Rang von p bestimmend.

p	$>$	$\leq$	$\leq$	$>$	$>$	$\leq$	$\leq$	$>$	$\leq$

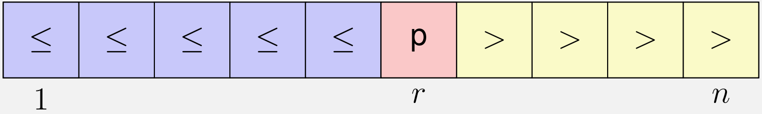
Pivotieren

1. Wähle ein Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, den Rang von p bestimmend.

p	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$>$	$>$	$>$	$>$

Pivotieren

1. Wähle ein Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, den Rang von p bestimmend.



Pivotieren

1. Wähle ein Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, den Rang von p bestimmend.
3. Rekursion auf dem relevanten Teil. Falls $k = r$, dann gefunden.

$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	p	$>$	$>$	$>$	$>$
1					r				n

Algorithmus Partition($A[l..r], p$)

Input : Array A, welches den Pivot p im Intervall $[l, r]$ mindestens einmal enthält.
Output : Array A partitioniert in $[l..r]$ um p. Rückgabe der Position von p.

while $l \leq r$ **do**
    while $A[l] < p$ **do**
        $l \leftarrow l + 1$
    while $A[r] > p$ **do**
        $r \leftarrow r - 1$
    swap($A[l]$, $A[r]$)
    if $A[l] = A[r]$ **then**
        $l \leftarrow l + 1$

return l-1

Korrektheit: Invariante

Invariante I: $A_i \leq p \; \forall i \in [0, l)$, $A_i \geq p \; \forall i \in (r, n]$, $\exists k \in [l, r] : A_k = p$.

while $l \leq r$ **do**

I

  while $A[l] < p$ **do**

    $l \leftarrow l + 1$

I und $A[l] \geq p$

  while $A[r] > p$ **do**

    $r \leftarrow r - 1$

I und $A[r] \leq p$

  swap$(A[l], A[r])$

I und $A[l] \leq p \leq A[r]$

  if $A[l] = A[r]$ **then**

    $l \leftarrow l + 1$

I

return l-1

Korrektheit: Fortschritt

while $l \leq r$ **do**

    while $A[l] < p$ **do** — Fortschritt wenn $A[l] < p$

        $l \leftarrow l + 1$

    while $A[r] > p$ **do** — Fortschritt wenn $A[r] > p$

        $r \leftarrow r - 1$

    swap$(A[l], A[r])$ — Fortschritt wenn $A[l] > p$ oder $A[r] < p$

    if $A[l] = A[r]$ **then** — Fortschritt wenn $A[l] = A[r] = p$

        $l \leftarrow l + 1$

return l-1

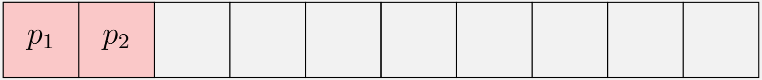
Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(?)$

p_1									

Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(?)$



Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(?)$

p_1	p_2	p_3							

Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(?)$

p_1	p_2	p_3	p_4						

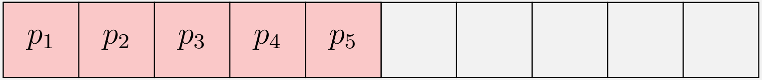
Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(n^2)$

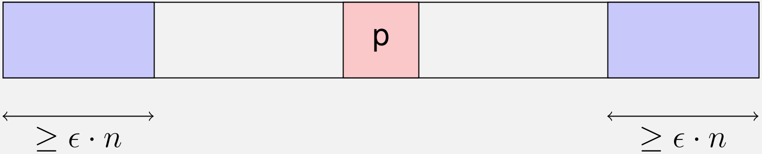
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5					

Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(n^2)$



Ein guter Pivot hat linear viele Elemente auf beiden Seiten.



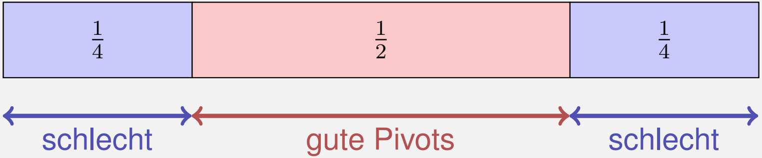
Analyse

Unterteilung mit Faktor q $(0 < q < 1)$: zwei Gruppen mit $q \cdot n$ und $(1 - q) \cdot n$ Elementen (ohne Einschränkung $q \geq 1 - q$).

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq T(q \cdot n) + c \cdot n \\
&= c \cdot n + q \cdot c \cdot n + T(q^2 \cdot n) = \ldots = c \cdot n \sum_{i=0}^{\log_q(n)-1} q^i + T(1) \\
&\leq c \cdot n \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} q^i}_{\text{geom. Reihe}} + d = c \cdot n \cdot \frac{1}{1-q} + d = \mathcal{O}(n)
\end{aligned}
$$

Wie bekommen wir das hin?

Der Zufall hilft uns (Tony Hoare, 1961). Wähle in jedem Schritt einen zufälligen Pivot.



Wahrscheinlichkeit für guten Pivot nach einem Versuch: $\frac{1}{2} =: \rho$.

Wahrscheinlichkeit für guten Pivot nach k Versuchen: $(1-\rho)^{k-1} \cdot \rho$.

Erwartungswert der geometrischen Verteilung: $1/\rho = 2$

[Erwartungswert der geometrischen Verteilung]

Zufallsvariable $X \in \mathbb{N}^+$ mit $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$.

Erwartungswert

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot (1-q) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} - k \cdot q^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot q^k - k \cdot q^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.
\end{aligned}
$$

Algorithmus Quickselect ($A[l..r], k$)

Input : Array A der Länge n. Indizes $1 \le l \le k \le r \le n$, so dass für alle $x \in A[l..r] : |\{j | A[j] \le x\}| \ge l$ und $|\{j | A[j] \le x\}| \le r$.
Output : Wert $x \in A[l..r]$ mit $|\{j | A[j] \le x\}| \ge k$ und $|\{j | x \le A[j]\}| \ge n - k + 1$

if l=r **then**
    return $A[l]$;

$x \leftarrow$ RandomPivot($A[l..r]$)
$m \leftarrow$ Partition($A[l..r], x$)
if $k < m$ **then**
    return QuickSelect($A[l..m-1], k$)
else if $k > m$ **then**
    return QuickSelect($A[m+1..r], k$)
else
    return $A[k]$

Algorithmus RandomPivot ($A[l..r]$)

Input : Array A der Länge n. Indizes $1 \leq l \leq i \leq r \leq n$
Output : Zufälliger "guter" Pivot $x \in A[l..r]$

```
repeat
    wähle zufälligen Pivot x ∈ A[l..r]
    p ← l
    for j = l to r do
        if A[j] ≤ x then p ← p + 1
until ⌊(3l+r)/4⌋ ≤ p ≤ ⌈(l+3r)/4⌉
return x
```

repeat
  wähle zufälligen Pivot $x \in A[l..r]$
  $p \leftarrow l$
  for $j = l$ **to** r **do**
    if $A[j] \leq x$ **then** $p \leftarrow p + 1$
until $\left\lfloor \frac{3l+r}{4} \right\rfloor \leq p \leq \left\lceil \frac{l+3r}{4} \right\rceil$
return x

Dieser Algorithmus ist nur von theoretischem Interesse und liefert im Erwartungswert nach 2 Durchläufen einen guten Pivot. Praktisch kann man im Algorithmus Quickselect direkt einen zufälligen Pivot uniformverteilt ziehen oder einen deterministischen Pivot wählen, z.B. den Median von drei Elementen.

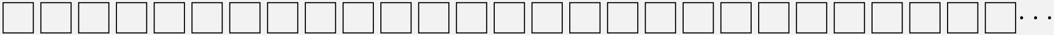
Median der Mediane

Ziel: Finde einen Algorithmus, welcher im schlechtesten Fall nur linear viele Schritte benötigt.

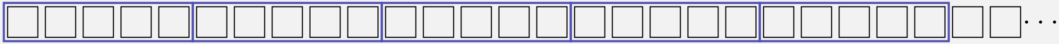
Algorithmus Select (k-smallest)

- Fünfergruppen bilden.
- Median jeder Gruppe bilden (naiv).
- Select rekursiv auf den Gruppenmedianen.
- Partitioniere das Array um den gefundenen Median der Mediane. Resultat: i
- Wenn $i = k$, Resultat. Sonst: Select rekursiv auf der richtigen Seite.

Median der Mediane

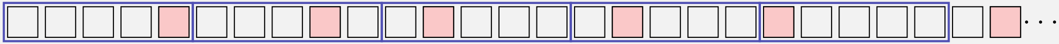


Median der Mediane



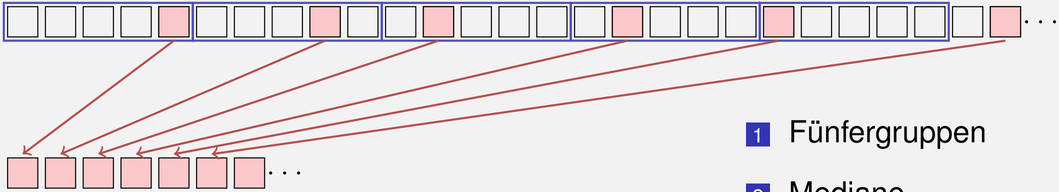
1. Fünfergruppen

Median der Mediane



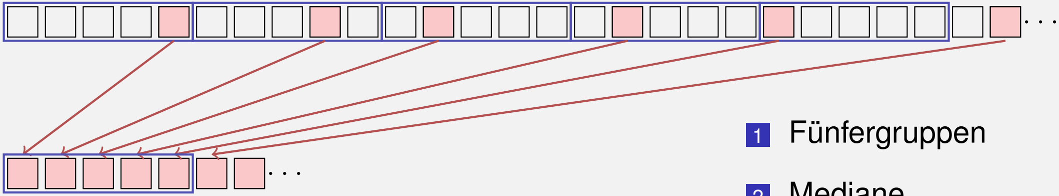
1. Fünfergruppen
2. Mediane

Median der Mediane



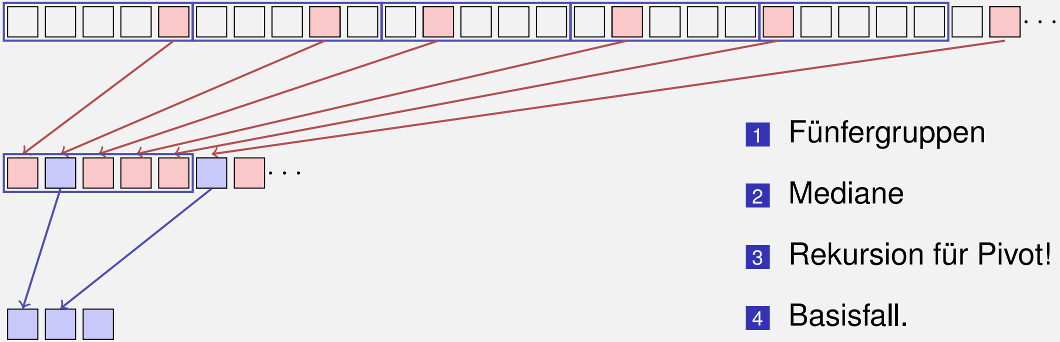
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!

Median der Mediane



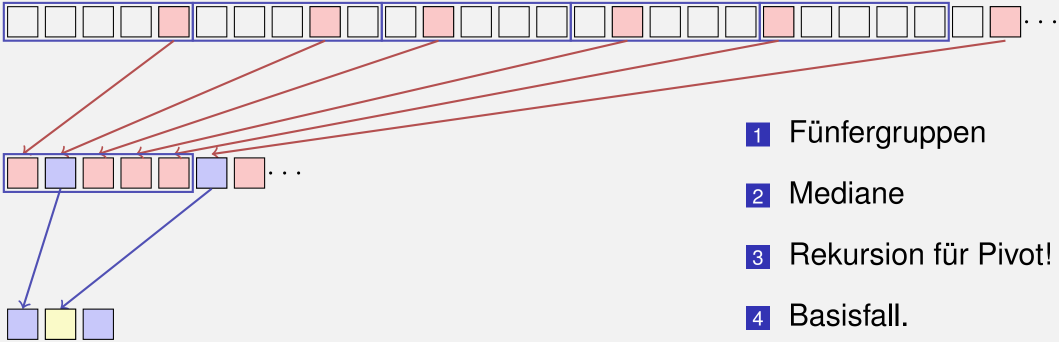
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!

Median der Mediane



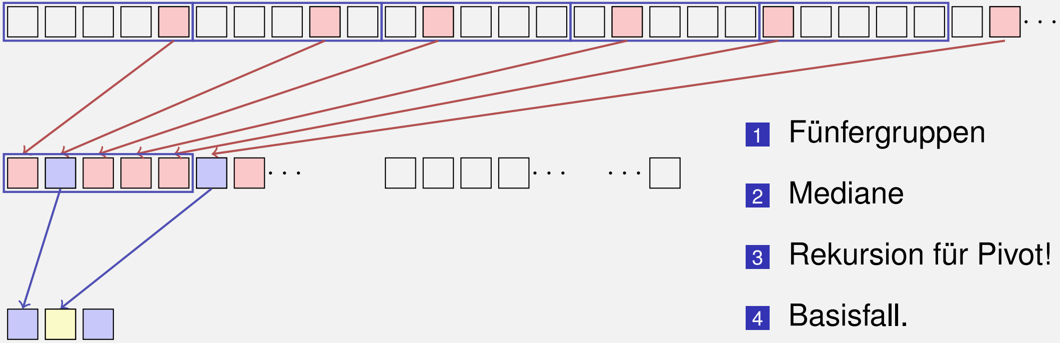
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.

Median der Mediane



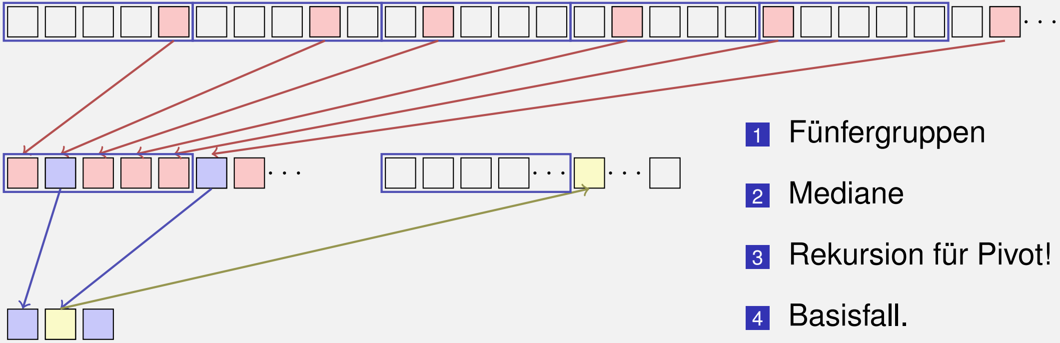
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.
5. Pivot (Level 1)

Median der Mediane



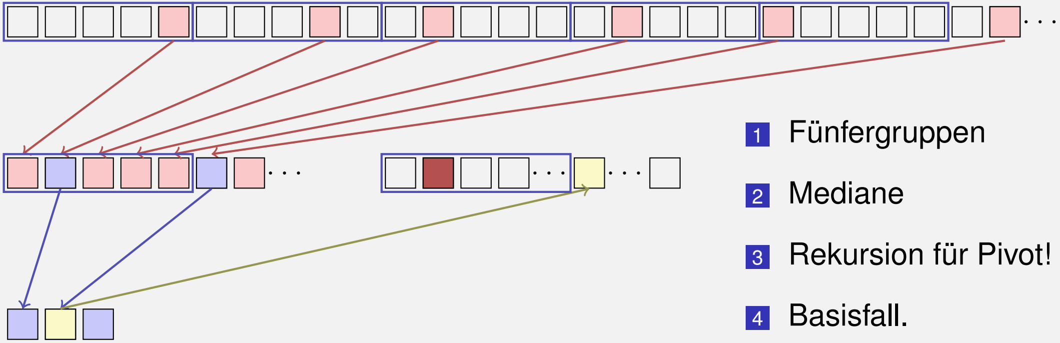
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.
5. Pivot (Level 1)

Median der Mediane



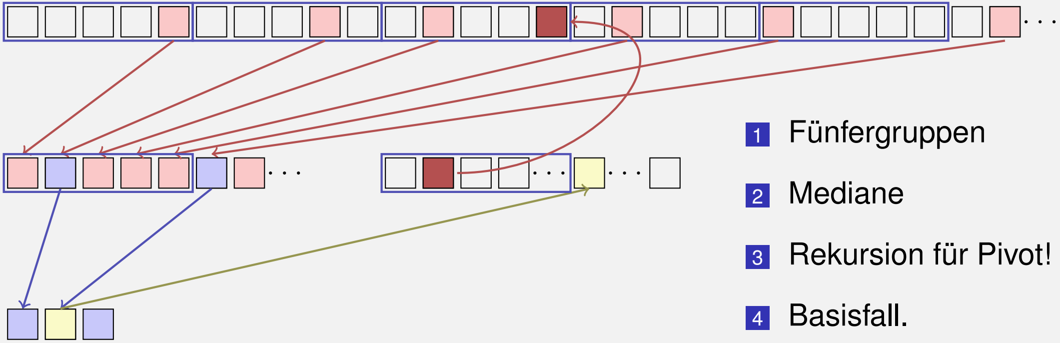
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.
5. Pivot (Level 1)
6. Partition (Level 1)

Median der Mediane



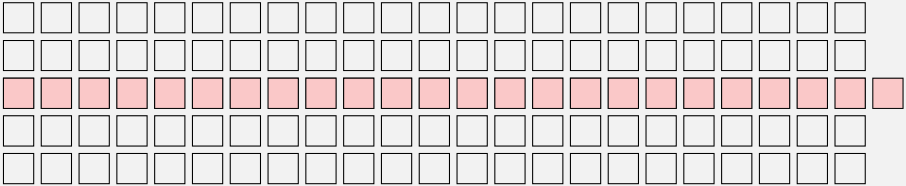
1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.
5. Pivot (Level 1)
6. Partition (Level 1)
7. Median = Pivot Level 0

Median der Mediane

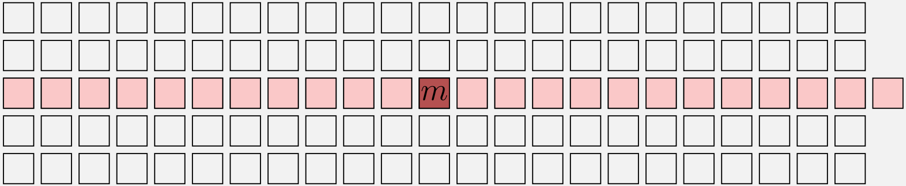


1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.
5. Pivot (Level 1)
6. Partition (Level 1)
7. Median = Pivot Level 0
8. 2. Rekursion startet

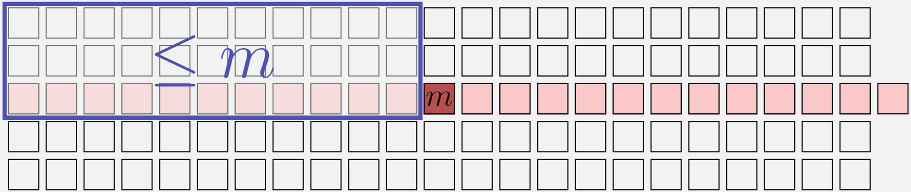
Was bringt das?



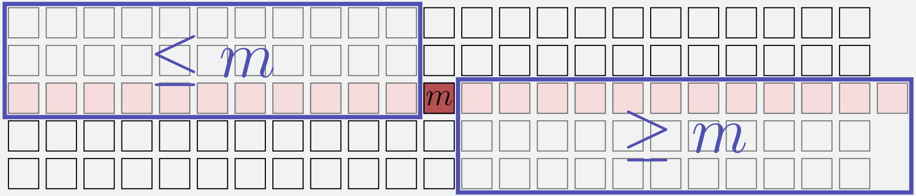
Was bringt das?



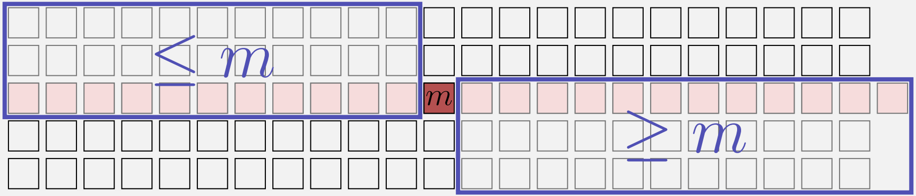
Was bringt das?



Was bringt das?

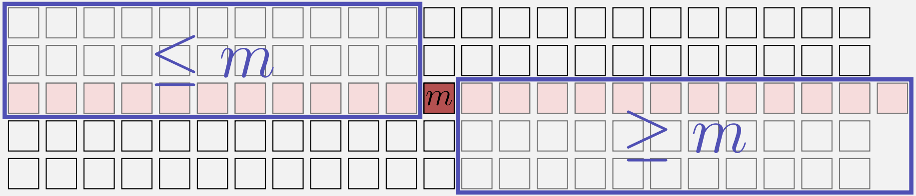


Was bringt das?



Anzahl Punkte links / rechts vom Median der Mediane (ohne Mediangruppe und ohne Restgruppe) $\geq 3 \cdot (\lceil \frac{1}{2} \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2) \geq \frac{3n}{10} - 6$

Was bringt das?



Anzahl Punkte links / rechts vom Median der Mediane (ohne Mediangruppe und ohne Restgruppe) $\geq 3 \cdot (\lceil \frac{1}{2} \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2) \geq \frac{3n}{10} - 6$

Zweiter Aufruf mit maximal $\lceil \frac{7n}{10} + 6 \rceil$ Elementen.

Analyse

Rekursionsungleichung:

$$T(n) \le T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lceil \frac{7n}{10} + 6 \right\rceil\right) + d \cdot n.$$

mit einer Konstanten d.

Behauptung:

$$T(n) = \mathcal{O}(n).$$

Beweis

Induktionsanfang: Wähle c so gross, dass

$$T(n) \leq c \cdot n \text{ für alle } n \leq n_0.$$

Induktionsannahme:

$$T(i) \leq c \cdot i \text{ für alle } i < n.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lceil \frac{7n}{10} + 6 \right\rceil\right) + d \cdot n \\ &= c \cdot \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + c \cdot \left\lceil \frac{7n}{10} + 6 \right\rceil + d \cdot n. \end{aligned}$$

Beweis

Induktionsschritt:

$$T(n) \leq c \cdot \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + c \cdot \left\lceil \frac{7n}{10} + 6 \right\rceil + d \cdot n$$

$$\leq c \cdot \frac{n}{5} + c + c \cdot \frac{7n}{10} + 6c + c + d \cdot n = \frac{9}{10} \cdot c \cdot n + 8c + d \cdot n.$$

Wähle $c \geq 80 \cdot d$ und $n_0 = 91$.

$$T(n) \leq \frac{72}{80} \cdot c \cdot n + 8c + \frac{1}{80} \cdot c \cdot n = c \cdot \underbrace{\left(\frac{73}{80} n + 8 \right)}_{\leq n \text{ für } n > n_0} \leq c \cdot n.$$

Resultat

Theorem

Das i-te Element einer Folge von n Elementen kann in höchstens $\mathcal{O}(n)$ Schritten gefunden werden.

Überblick

1.	Wiederholt Minimum finden	$\mathcal{O}(n^2)$
2.	Sortieren und $A[i]$ ausgeben	$\mathcal{O}(n \log n)$
3.	Quickselect mit zufälligem Pivot	$\mathcal{O}(n)$ im Mittel
4.	Median of Medians (Blum)	$\mathcal{O}(n)$ im schlimmsten Fall