

19. Dynamic Programming I

Fibonacci, Längste aufsteigende Teilfolge, längste gemeinsame Teilfolge, Editierdistanz, Matrixkettenmultiplikation, Matrixmultiplikation nach Strassen [Ottman/Widmayer, Kap. 1.2.3, 7.1, 7.4, Cormen et al, Kap. 15]

Quiz: Boxen Stapeln

- Gegeben: n Boxen mit Größen $w_i \times d_i \times h_i$
- Gesucht: maximale Höhe eines erlaubten Stapels
- Erlaubter Stapel: Grundfläche gestapelter Boxen muss in beiden Richtungen (Breite und Tiefe) strikt kleiner werden



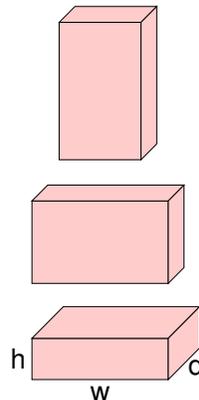
502

503

Boxen Stapeln

Wir gehen davon aus, dass es genügend Boxen jeder Sorte gibt, so dass jede Box in jeder Orientierung verfügbar ist (Abbildung rechts).

Lösung: später



Einfacher: Fibonacci Zahlen



$$F_n := \begin{cases} n & \text{wenn } n < 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{wenn } n \geq 2. \end{cases}$$

Analyse: warum ist der rekursive Algorithmus so langsam.

Box	1	2	3	4	5	6
$[w \times d \times h]$	$[1 \times 2 \times 3]$	$[1 \times 3 \times 2]$	$[2 \times 3 \times 1]$	$[3 \times 4 \times 5]$	$[3 \times 5 \times 4]$	$[4 \times 5 \times 3]$

504

505

Algorithmus FibonacciRecursive(n)

Input : $n \geq 0$

Output : n -te Fibonacci Zahl

if $n < 2$ **then**

 | $f \leftarrow n$

else

 | $f \leftarrow \text{FibonacciRecursive}(n - 1) + \text{FibonacciRecursive}(n - 2)$

return f

Analyse

$T(n)$: Anzahl der ausgeführten Operationen.

■ $n = 0, 1$: $T(n) = \Theta(1)$

■ $n \geq 2$: $T(n) = T(n - 2) + T(n - 1) + c$.

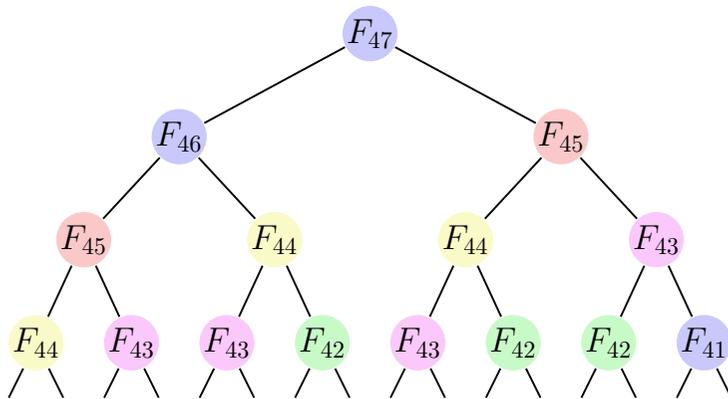
$$T(n) = T(n - 2) + T(n - 1) + c \geq 2T(n - 2) + c \geq 2^{n/2}c' = (\sqrt{2})^n c'$$

Algorithmus ist *exponentiell (!)* in n .

506

507

Grund, visualisiert



Knoten mit denselben Werten werden (zu) oft ausgewertet.

Memoization

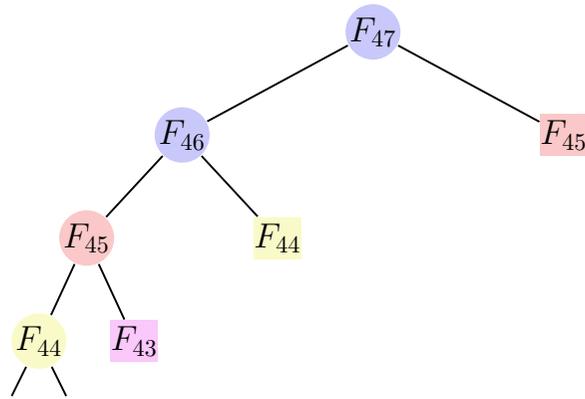
Memoization (sic) Abspeichern von Zwischenergebnissen.

- Bevor ein Teilproblem gelöst wird, wird Existenz eines entsprechenden Zwischenergebnis geprüft.
- Existiert ein gespeichertes Zwischenergebnis bereits, so wird dieses verwendet.
- Andernfalls wird der Algorithmus ausgeführt und das Ergebnis wird entsprechend gespeichert.

508

509

Memoization bei Fibonacci



Rechteckige Knoten wurden bereits ausgewertet.

Algorithmus FibonacciMemoization(n)

Input : $n \geq 0$

Output : n -te Fibonacci Zahl

if $n \leq 2$ **then**

$f \leftarrow 1$

else if $\exists \text{memo}[n]$ **then**

$f \leftarrow \text{memo}[n]$

else

$f \leftarrow \text{FibonacciMemoization}(n - 1) + \text{FibonacciMemoization}(n - 2)$

$\text{memo}[n] \leftarrow f$

return f

510

511

Analyse

Berechnungsaufwand:

$$T(n) = T(n - 1) + c = \dots = \mathcal{O}(n).$$

Algorithmus benötigt $\Theta(n)$ Speicher.²⁹

Genauer hingesehen ...

... berechnet der Algorithmus der Reihe nach die Werte $F_1, F_2, F_3,$
... verkleidet im *Top-Down* Ansatz der Rekursion.

Man kann den Algorithmus auch gleich *Bottom-Up* hinschreiben.
Man spricht dann auch von *dynamischer Programmierung*.

²⁹Allerdings benötigt der naive Algorithmus auch $\Theta(n)$ Speicher für die Rekursionsverwaltung.

512

513

Algorithmus FibonacciDynamicProgram(n)

Input : $n \geq 0$

Output : n -te Fibonacci Zahl

$F[1] \leftarrow 1$

$F[2] \leftarrow 1$

for $i \leftarrow 3, \dots, n$ **do**

$F[i] \leftarrow F[i - 1] + F[i - 2]$

return $F[n]$

Dynamische Programmierung: Idee

- Aufteilen eines komplexen Problems in eine vernünftige Anzahl kleinerer Teilprobleme
- Die Lösung der Teilprobleme wird zur Lösung des komplexeren Problems verwendet
- Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

514

515

Dynamische Programmierung: Konsequenz

Identische Teilprobleme werden nur einmal gerechnet

⇒ Resultate werden zwischengespeichert



192.-
HyperX Fury (2x, 8GB,
DDR4-2400, DIMM 288)

***** 16

Wir tauschen Laufzeit
gegen Speicherplatz

Dynamic Programming = Divide-And-Conquer ?

- In beiden Fällen ist das Ursprungsproblem (einfacher) lösbar, indem Lösungen von Teilproblemen herangezogen werden können. Das Problem hat *optimale Substruktur*.
- Bei Divide-And-Conquer Algorithmen (z.B. Mergesort) sind Teilprobleme unabhängig; deren Lösungen werden im Algorithmus nur einmal benötigt.
- Beim DP sind Teilprobleme nicht unabhängig. Das Problem hat *überlappende Teilprobleme*, welche im Algorithmus mehrfach gebraucht werden. Damit sie nur einmal gerechnet werden müssen, werden Resultate tabelliert.

516

517

Dynamic Programming: Vorgehen

- 1 Verwalte **DP-Tabelle** mit Information zu den Teilproblemen.
Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
- 2 Berechnung der **Randfälle**.
Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?
- 3 **Berechnungsreihenfolge** bestimmen.
In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?
- 4 Auslesen der **Lösung**.
Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

Laufzeit (typisch) = Anzahl Einträge der Tabelle mal Aufwand pro Eintrag.

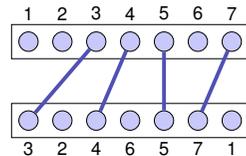
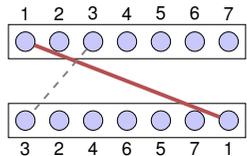
518

Dynamic Programming: Vorgehen am Beispiel

- 1 Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?
Tabelle der Grösse $n \times 1$. n -ter Eintrag enthält n -te Fibonacci Zahl.
- 2 Welche Einträge hängen nicht von anderen ab?
Werte F_1 und F_2 sind unabhängig einfach "berechenbar".
- 3 In welcher Reihenfolge können Einträge berechnet werden, so dass benötigte Einträge jeweils vorhanden sind?
 F_i mit aufsteigenden i .
- 4 Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?
 F_n ist die n -te Fibonacci-Zahl.

519

Längste aufsteigende Teilfolge (LAT)

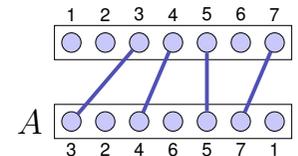


Verbinde so viele passende Anschlüsse wie möglich, ohne dass sich die Anschlüsse kreuzen.

520

Formalisieren

- Betrachte Folge $A = (a_1, \dots, a_n)$.
- Suche eine längste aufsteigende Teilfolge von A .
- Beispiele aufsteigender Teilfolgen:
 $(3, 4, 5)$, $(2, 4, 5, 7)$, $(3, 4, 5, 7)$, $(3, 7)$.



Verallgemeinerung: Lasse Zahlen ausserhalb von $1, \dots, n$ zu, auch mit Mehrfacheinträgen. Lasse nur strikt aufsteigende Teilfolgen zu.
Beispiel: $(2,3,3,3,5,1)$ mit aufsteigender Teilfolge $(2,3,5)$.

521

Erster Entwurf

Annahme: LAT L_k für k bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für $k + 1$ berechnen.

Wenn a_{k+1} zu L_k passt, dann $L_{k+1} = L_k \oplus a_{k+1}$

Gegenbeispiel: $A_5 = (1, 2, 5, 3, 4)$. Sei $A_3 = (1, 2, 5)$ mit $L_3 = A$. Bestimme L_4 aus L_3 ?

So kommen wir nicht weiter: können nicht von L_k auf L_{k+1} schliessen.

Zweiter Entwurf

Annahme: eine LAT L_j für alle $j \leq k$ bekannt. Wollen nun LAT L_{k+1} für $k + 1$ berechnen.

Betrachte alle passenden $L_{k+1} = L_j \oplus a_{k+1}$ ($j \leq k$) und wähle eine längste solche Folge.

Gegenbeispiel: $A_5 = (1, 2, 5, 3, 4)$. Sei $A_4 = (1, 2, 5, 3)$ mit $L_1 = (1)$, $L_2 = (1, 2)$, $L_3 = (1, 2, 5)$, $L_4 = (1, 2, 5)$. Bestimme L_5 aus L_1, \dots, L_4 ?

So kommen wir nicht weiter: können nicht von *jeweils nur einer beliebigen Lösung* L_j auf L_{k+1} schliessen. Wir müssten alle möglichen LAT betrachten. Zu viel!

522

523

Dritter Entwurf

Annahme: die LAT L_j , *welche mit kleinstem Element endet* sei für alle Längen $1 \leq j \leq k$ bekannt.

Betrachte nun alle passenden $L_j \oplus a_{k+1}$ ($j \leq k$) und aktualisiere die Tabelle der längsten aufsteigenden Folgen, welche mit kleinstem Element enden.

Beispiel: $A = (1, 1000, 1001, 2, 3, 4, \dots, 999)$

A	LAT
(1)	(1)
(1, 1000)	(1), (1, 1000)
(1, 1000, 1001)	(1), (1, 1000), (1, 1000, 1001)
(1, 1000, 1001, 2)	(1), (1, 2), (1, 1000, 1001)
(1, 1000, 1001, 2, 3)	(1), (1, 2), (1, 2, 3)

524

DP Table

■ Idee: speichere jeweils nur das letzte Element der aufsteigenden Folge L_j am Slot j .

■ Beispielfolge:
3 2 5 1 6 4

■ Problem: **Tabelle** enthält zum Schluss nicht die Folge, nur den letzten Wert.

■ Lösung: **Zweite Tabelle** mit den Vorgängern.

Index	1	2	3	4	5	6
Wert	3	2	5	1	6	4
Vorgänger	$-\infty$	$-\infty$	2	$-\infty$	5	1

Index	0	1	2	3	4	...
$(L_j)_j$	$-\infty$	1	4	6	∞	

525

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

- 1 Zwei Tabellen $T[0, \dots, n]$ und $V[1, \dots, n]$. Zu Beginn $T[0] \leftarrow -\infty$, $T[i] \leftarrow \infty \forall i > 1$

Berechnung eines Eintrags

- 2 Einträge in T aufsteigend sortiert. Für jeden Neueintrag a_{k+1} binäre Suche nach l , so dass $T[l] < a_k < T[l+1]$. Setze $T[l+1] \leftarrow a_{k+1}$. Setze $V[k] = T[l]$.

Dynamic Programming Algorithmus LAT

Berechnungsreihenfolge

- 3 Beim Traversieren der Liste werden die Einträge $T[k]$ und $V[k]$ mit aufsteigendem k berechnet.

Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

- 4 Suche das grösste l mit $T[l] < \infty$. l ist der letzte Index der LAT. Suche von l ausgehend den Index $i < l$, so dass $V[l] = A[i]$, i ist der Vorgänger von l . Repetiere mit $l \leftarrow i$ bis $T[l] = -\infty$

526

527

Analyse

■ Berechnung Tabelle:

- Initialisierung: $\Theta(n)$ Operationen
- Berechnung k -ter Eintrag: Binäre Suche auf Positionen $\{1, \dots, k\}$ plus konstante Anzahl Zuweisungen.

$$\sum_{k=1}^n (\log k + \mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(n) + \sum_{k=1}^n \log(k) = \Theta(n \log n).$$

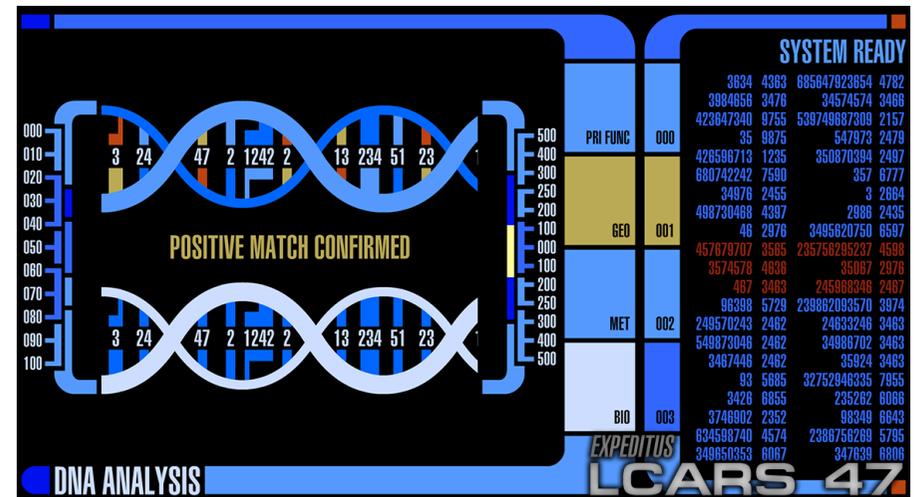
- Rekonstruktion: Traversiere A von rechts nach links: $\mathcal{O}(n)$.

Somit Gesamtlaufzeit

$$\Theta(n \log n).$$

528

DNA - Vergleich (Star Trek)



529

DNA - Vergleich

- DNA besteht aus Sequenzen von vier verschiedenen Nukleotiden
Adenin **G**uanin **T**hymine **C**ytosin
- DNA-Sequenzen (Gene) werden mit Zeichenketten aus A, G, T und C beschrieben.
- Ein möglicher Vergleich zweier Gene: Bestimme **Längste gemeinsame Teilfolge**

Längste Gemeinsame Teilfolge

Teilfolgen einer Zeichenkette:

Teilfolgen(**KUH**): (), (**K**), (**U**), (**H**), (**KU**), (**KH**), (**UH**), (**KUH**)

Problem:

- **Eingabe:** Zwei Zeichenketten $A = (a_1, \dots, a_m)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ der Längen $m > 0$ und $n > 0$.
- **Gesucht:** Eine längste gemeinsame Teilfolge (LGT) von A und B .

530

531

Längste Gemeinsame Teilfolge

Beispiele:

$LGT(IGEL, KATZE) = E$, $LGT(TIGER, ZIEGE) = IGE$

Ideen zur Lösung?

T I G E R
Z I E G E

Rekursives Vorgehen

Annahme: Lösungen $L(i, j)$ bekannt für $A[1, \dots, i]$ und $B[1, \dots, j]$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$, jedoch nicht für $i = m$ und $j = n$.

T I G E R
Z I E G E

Betrachten Zeichen a_m, b_n . Drei Möglichkeiten:

- 1 A wird um ein Leerzeichen erweitert. $L(m, n) = L(m, n - 1)$
- 2 B wird um ein Leerzeichen erweitert. $L(m, n) = L(m - 1, n)$
- 3 $L(m, n) = L(m - 1, n - 1) + \delta_{mn}$ mit $\delta_{mn} = 1$ wenn $a_m = b_n$ und $\delta_{mn} = 0$ sonst

532

533

Rekursion

$$L(m, n) \leftarrow \max \{L(m-1, n-1) + \delta_{mn}, L(m, n-1), L(m-1, n)\}$$

für $m, n > 0$ und Randfälle $L(\cdot, 0) = 0, L(0, \cdot) = 0$.

	\emptyset	Z	I	E	G	E
\emptyset	0	0	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0
I	0	0	1	1	1	1
G	0	0	1	1	2	2
E	0	0	1	2	2	3
R	0	0	1	2	2	3

534

Dynamic Programming Algorithmus LGT

Dimension der Tabelle? Bedeutung der Einträge?

- 1 Tabelle $L[0, \dots, m][0, \dots, n]$. $L[i, j]$: Länge einer LGT der Zeichenketten (a_1, \dots, a_i) und (b_1, \dots, b_j)

Berechnung eines Eintrags

- 2 $L[0, i] \leftarrow 0 \forall 0 \leq i \leq m, L[j, 0] \leftarrow 0 \forall 0 \leq j \leq n$. Berechnung von $L[i, j]$ sonst mit $L[i, j] = \max(L[i-1, j-1] + \delta_{ij}, L[i, j-1], L[i-1, j])$.

535

Dynamic Programming Algorithmus LGT

Berechnungsreihenfolge

- 3 Abhängigkeiten berücksichtigen: z.B. Zeilen aufsteigend und innerhalb von Zeilen Spalten aufsteigend.

Wie kann sich Lösung aus der Tabelle konstruieren lassen?

- 4 Beginne bei $j = m, i = n$. Falls $a_i = b_j$ gilt, gib a_i aus und fahre fort mit $(j, i) \leftarrow (j-1, i-1)$; sonst, falls $L[i, j] = L[i, j-1]$ fahre fort mit $j \leftarrow j-1$; sonst, falls $L[i, j] = L[i-1, j]$ fahre fort mit $i \leftarrow i-1$. Terminiere für $i = 0$ oder $j = 0$.

536

Analyse LGT

- Anzahl Tabelleneinträge: $(m+1) \cdot (n+1)$.
- Berechnung jeweils mit konstanter Anzahl Zuweisungen und Vergleichen. Anzahl Schritte $\mathcal{O}(mn)$
- Bestimmen der Lösung: jeweils Verringerung von i oder j . Maximal $\mathcal{O}(n+m)$ Schritte.

Laufzeit insgesamt:

$$\mathcal{O}(mn).$$

537

Editierdistanz

Editierdistanz von zwei Zeichenketten $A = (a_1, \dots, a_m)$,
 $B = (b_1, \dots, b_m)$.

Editieroperationen:

- Einfügen eines Zeichens
- Löschen eines Zeichens
- Änderung eines Zeichens

Frage: Wie viele Editieroperationen sind mindestens nötig, um eine gegebene Zeichenkette A in eine Zeichenkette B zu überführen.

TIGER ZIGER ZIEGER ZIEGE

Editierdistanz= Levenshtein Distanz

538

Vorgehen?

- Zweidimensionale Tabelle $E[0, \dots, m][0, \dots, n]$ mit Editierdistanzen $E[i, j]$ zwischen Worten $A_i = (a_1, \dots, a_i)$ und $B_j = (b_1, \dots, b_j)$.
- Betrachte die jeweils letzten Zeichen von A_i und B_j . Drei mögliche Fälle:

- 1 Lösche letztes Zeichen von A_i : $E[i-1, j] + 1$.
- 2 Füge Zeichen zu A_i hinzu:³¹ $E[i, j-1] + 1$.
- 3 Ersetze A_i durch B_j : $E[i-1, j-1] + 1 - \delta_{ij}$.

$$E[i, j] \leftarrow \min \{ E[i-1, j] + 1, E[i, j-1] + 1, E[i-1, j-1] + 1 - \delta_{ij} \}$$

³⁰oder füge Zeichen zu B_j hinzu

³¹oder lösche letztes Zeichen von B_j

539

DP Tabelle

$$E[i, j] \leftarrow \min \{ E[i-1, j] + 1, E[i, j-1] + 1, E[i-1, j-1] + 1 - \delta_{ij} \}$$

	∅	Z	I	E	G	E
∅	0	1	2	3	4	5
T	1	1	2	3	4	5
I	2	2	1	2	3	4
G	3	3	2	2	1	2
E	4	4	3	2	3	2
R	5	5	4	3	3	3

Algorithmus: Übung!

540

Matrix-Kettenmultiplikation

Aufgabe: Berechnung des Produktes $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ von Matrizen A_1, \dots, A_n .

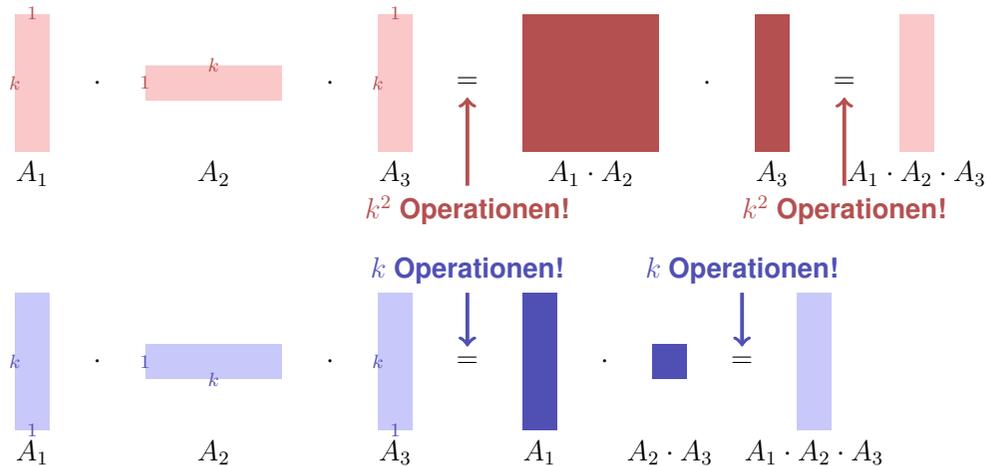
Matrizenmultiplikation ist assoziativ, d.h. Klammerung kann beliebig gewählt werden.

Ziel: möglichst effiziente Berechnung des Produktes.

Annahme: Multiplikation einer $(r \times s)$ -Matrix mit einer $(s \times u)$ -Matrix hat Kosten $r \cdot s \cdot u$.

541

Macht das einen Unterschied?



542

Rekursion

- Annahme, dass die bestmögliche Berechnung von $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_i)$ und $(A_{i+1} \cdot A_{i+2} \cdots A_n)$ für jedes i bereits bekannt ist.
- Bestimme bestes i , fertig.

$n \times n$ -Tabelle M . Eintrag $M[p, q]$ enthält Kosten der besten Klammerung von $(A_p \cdot A_{p+1} \cdots A_q)$.

$$M[p, q] \leftarrow \min_{p \leq i < q} (M[p, i] + M[i + 1, q] + \text{Kosten letzte Multiplikation})$$

543

Berechnung der DP-Tabelle

- Randfälle: $M[p, p] \leftarrow 0$ für alle $1 \leq p \leq n$.
- Berechnung von $M[p, q]$ hängt ab von $M[i, j]$ mit $p \leq i \leq j \leq q$, $(i, j) \neq (p, q)$.
Insbesondere hängt $M[p, q]$ höchstens ab von Einträgen $M[i, j]$ mit $i - j < q - p$.
Folgerung: Fülle die Tabelle von der Diagonale ausgehend.

544

Analyse

DP-Tabelle hat n^2 Einträge. Berechnung eines Eintrages bedingt Betrachten von bis zu $n - 1$ anderen Einträgen.

Gesamtlaufzeit $\mathcal{O}(n^3)$.

Auslesen der Reihenfolge aus M : Übung!

545

Exkurs: Matrixmultiplikation

Betrachten Multiplikation zweier $n \times n$ -Matrizen.

Seien

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n},$$

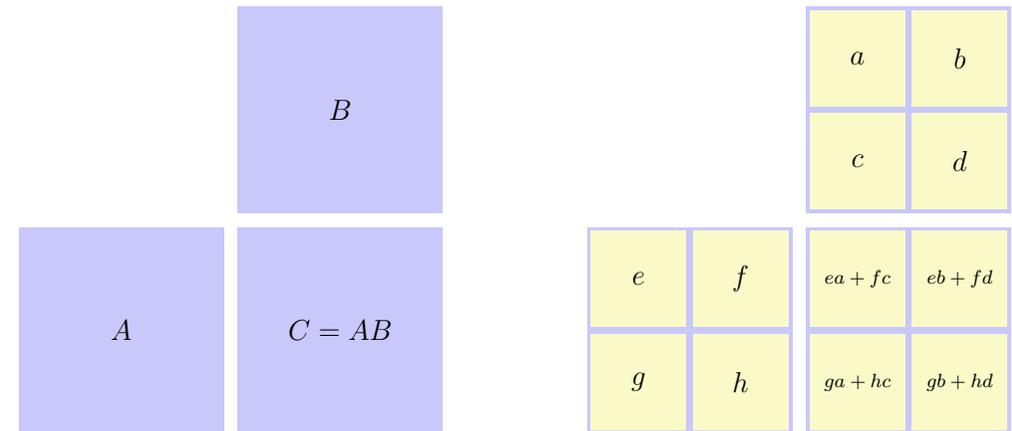
$$C = A \cdot B$$

dann

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Naiver Algorithmus benötigt $\Theta(n^3)$ elementare Multiplikationen.

Divide and Conquer

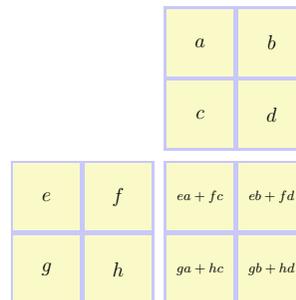


546

547

Divide and Conquer

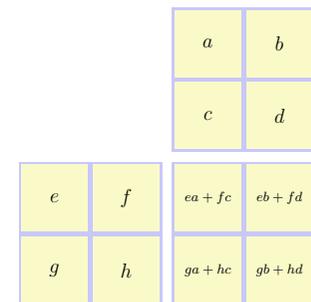
- Annahme $n = 2^k$.
- Anzahl elementare Multiplikationen:
 $M(n) = 8M(n/2), M(1) = 1$.
- Ergibt $M(n) = 8^{\log_2 n} = n^{\log_2 8} = n^3$. Kein Gewinn 😞



548

Strassens Matrixmultiplikation

- **Nichttriviale Beobachtung von Strassen (1969):** Es genügt die Berechnung der sieben Produkte $A = (e + h) \cdot (a + d), B = (g + h) \cdot a, C = e \cdot (b - d), D = h \cdot (c - a), E = (e + f) \cdot d, F = (g - e) \cdot (a + b), G = (f - h) \cdot (c + d)$. Denn:
 $ea + fc = A + D - E + G, eb + fd = C + E, ga + hc = B + D, gb + hd = A - B + C + F$.
- Damit ergibt sich
 $M'(n) = 7M(n/2), M'(1) = 1$.
Also $M'(n) = 7^{\log_2 n} = n^{\log_2 7} \approx n^{2.807}$.
- Schnellster bekannter Algorithmus:
 $\mathcal{O}(n^{2.37})$



549