10. Sortieren III

Untere Schranken für das vergleichsbasierte Sortieren, Radix- und Bucketsort

10.1 Untere Grenzen für Vergleichbasiertes Sortieren

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.8, Cormen et al, Kap. 8.1]

Untere Schranke für das Sortieren

Bis hierher: Sortieren im schlechtesten Fall benötigt $\Omega(n \log n)$ Schritte.

Geht es besser? Nein:

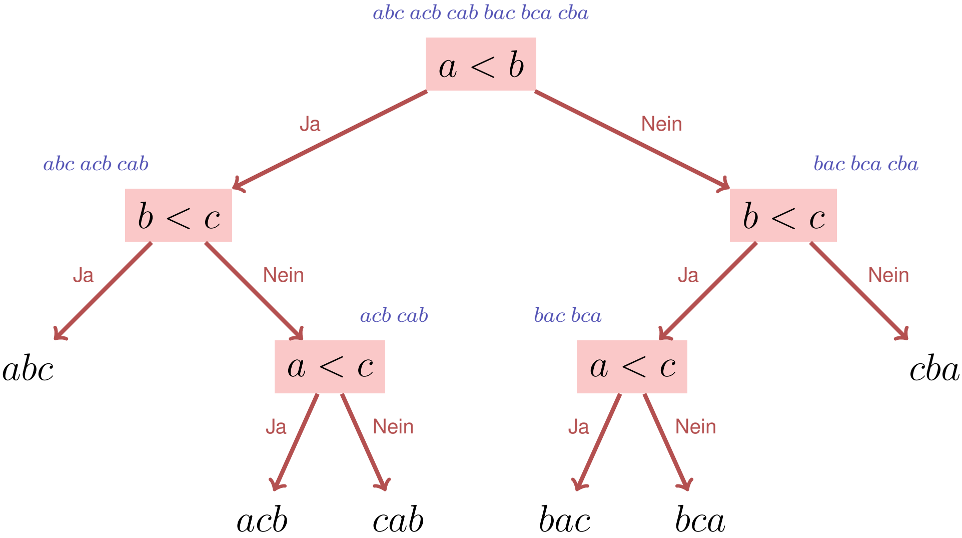
Theorem

Vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigen im schlechtesten Fall und im Mittel mindestens $\Omega(n \log n)$ *Schlüsselvergleiche.*

Vergleichsbasiertes Sortieren

- Algorithmus muss unter $n!$ vielen Anordnungsmöglichkeiten einer Folge $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ die richtige identifizieren.
- Zu Beginn weiss der Algorithmus nichts.
- Betrachten den "Wissensgewinn" des Algorithmus als Entscheidungsbaum:
  - Knoten enthalten verbleibende Möglichkeiten
  - Kanten enthalten Entscheidungen

Entscheidungsbaum



Entscheidungsbaum

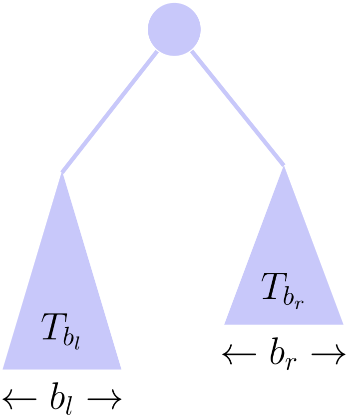
Die Höhe eines binären Baumes mit L Blättern ist mindestens $\log_2 L$. $\Rightarrow$ Höhe des Entscheidungsbaumes $h \geq \log n! \in \Omega(n \log n)$.[11]

Somit auch die Länge des längsten Pfades im Entscheidungsbaum $\in \Omega(n \log n)$.

Bleibt zu zeigen: mittlere Länge $M(n)$ eines Pfades $M(n) \in \Omega(n \log n)$.

[11] $\log n! \in \Theta(n \log n)$:
$\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k \leq n \log n$.
$\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k \geq \sum_{k=n/2}^{n} \log k \geq \frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2}$.

Untere Schranke im Mittel



- Entscheidungsbaum T_n mit n Blättern, mittlere Tiefe eines Blatts $m(T_n)$
- Annahme: $m(T_n) \geq \log n$ nicht für alle n.
- Wähle kleinstes b mit $m(T_b) < \log n \Rightarrow b \geq 2$
- $b_l + b_r = b$, oBdA $b_l > 0$ und $b_r > 0 \Rightarrow$ $b_l < b, b_r < b \Rightarrow m(T_{b_l}) \geq \log b_l$ und $m(T_{b_r}) \geq \log b_r$

Untere Schranke im Mittel

Mittlere Tiefe eines Blatts:

$$\begin{aligned}
m(T_b) &= \frac{b_l}{b}(m(T_{b_l})+1) + \frac{b_r}{b}(m(T_{b_r})+1)\\
&\geq \frac{1}{b}(b_l(\log b_l + 1) + b_r(\log b_r + 1)) = \frac{1}{b}(b_l \log 2b_l + b_r \log 2b_r)\\
&\geq \frac{1}{b}(b \log b) = \log b.
\end{aligned}$$

Widerspruch. ■

Die letzte Ungleichung gilt, da $f(x) = x \log x$ konvex ist und für eine konvexe Funktion gilt $f((x+y)/2) \leq 1/2 f(x) + 1/2 f(y)$ ($x = 2b_l$, $y = 2b_r$ einsetzen).[12]
Einsetzen von $x = 2b_l$, $y = 2b_r$, und $b_l + b_r = b$.

[12] allgemein $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ für $0 \leq \lambda \leq 1$.

10.2 Radixsort und Bucketsort

Radixsort, Bucketsort [Ottman/Widmayer, Kap. 2.5, Cormen et al, Kap. 8.3]

Radix Sort

Vergleichsbasierte Sortierverfahren: Schlüssel vergleichbar ($<$ oder $>$, $=$). Ansonsten keine Voraussetzung.

Andere Idee: nutze mehr Information über die Zusammensetzung der Schlüssel.

Annahmen

Annahme: Schlüssel darstellbar als Wörter aus einem Alphabet mit m Elementen.

Beispiele

$m = 10$	Dezimalzahlen	$183 = 183_{10}$
$m = 2$	Dualzahlen	101_2
$m = 16$	Hexadezimalzahlen	$A0_{16}$
$m = 26$	Wörter	“INFORMATIK”

m heisst die Wurzel (lateinisch *Radix) der Darstellung.*

Annahmen

- Schlüssel =m-adische Zahlen mit gleicher Länge.
- Verfahren z zur Extraktion der k-ten Ziffer eines Schlüssels in $\mathcal{O}(1)$ Schritten.

Beispiel

$z_{10}(0, 85) = 5$
$z_{10}(1, 85) = 8$
$z_{10}(2, 85) = 0$

Radix-Exchange-Sort

Schlüssel mit Radix 2.

Beobachtung: Wenn $k \geq 0$,

$$z_2(i, x) = z_2(i, y) \text{ für alle } i > k$$

und

$$z_2(k, x) < z_2(k, y),$$

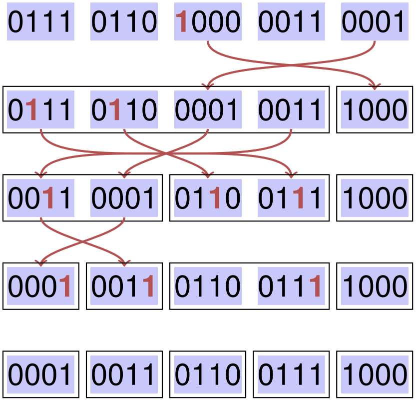
dann $x < y$.

Radix-Exchange-Sort

Idee:

- Starte mit maximalem k.
- Binäres Aufteilen der Datensätze mit $z_2(k,\cdot) = 0$ vs. $z_2(k,\cdot) = 1$ wie bei Quicksort.
- $k \leftarrow k - 1$.

Radix-Exchange-Sort



Algorithmus RadixExchangeSort(A, l, r, b)

Input : Array A der Länge n, linke und rechte Grenze $1 \leq l \leq r \leq n$, Bitposition b

Output : Array A, im Bereich $[l, r]$ nach Bits $[0, \ldots, b]$ sortiert.

if $l > r$ **and** $b \geq 0$ **then**

    $i \leftarrow l - 1$

    $j \leftarrow r + 1$

    repeat

        repeat $i \leftarrow i + 1$ **until** $z_2(b, A[i]) = 1$ **and** $i \geq j$

        repeat $j \leftarrow j + 1$ **until** $z_2(b, A[j]) = 0$ **and** $i \geq j$

        if $i < j$ **then** swap($A[i], A[j]$)

    until $i \geq j$

    RadixExchangeSort($A, l, i - 1, b - 1$)

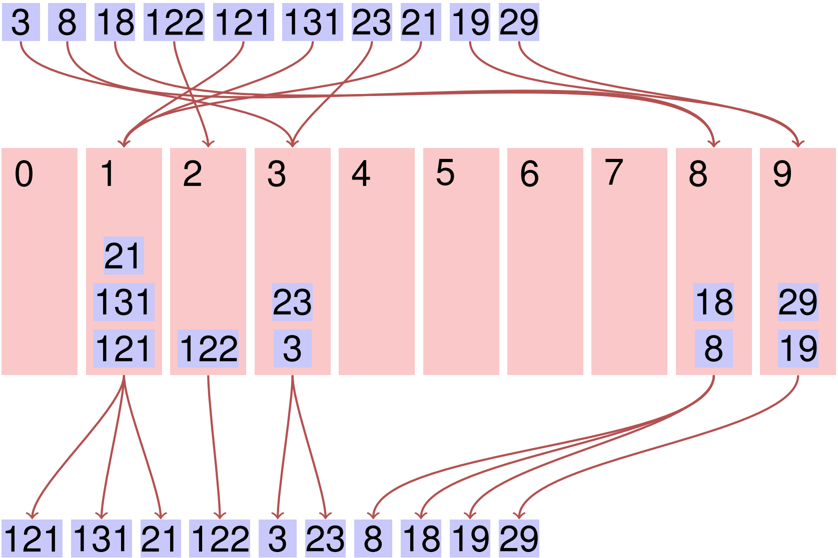
    RadixExchangeSort($A, i, r, b - 1$)

Analyse

RadixExchangeSort ist rekursiv mit maximaler Rekursionstiefe = maximaler Anzahl Ziffern p.

Laufzeit im schlechtesten Fall $\mathcal{O}(p \cdot n)$.

Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)



Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)

121 131 21 122 3 23 8 18 19 29

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		29							
		23							
		122							
8	19	21							
3	18	121	131						

3 8 18 19 121 21 122 23 29

Bucket Sort (Sortieren durch Fachverteilen)

3 8 18 19 121 21 122 23 29

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
29									
23									
21									
19									
18	131								
8	122								
3	121								

3 8 18 19 21 23 29 121 122 131

Implementationsdetails

Bucketgrösse sehr unterschiedlich. Zwei Möglichkeiten

- Verkettete Liste für jede Ziffer.
- Ein Array der Länge n, Offsets für jede Ziffer in erstem Durchlauf bestimmen.

11. Elementare Datentypen

Abstrakte Datentypen Stapel, Warteschlange, Implementationsvarianten der verketteten Liste, amortisierte Analyse [Ottman/Widmayer, Kap. 1.5.1-1.5.2, Cormen et al, Kap. 10.1.-10.2,17.1-17.3]

Abstrakte Datentypen

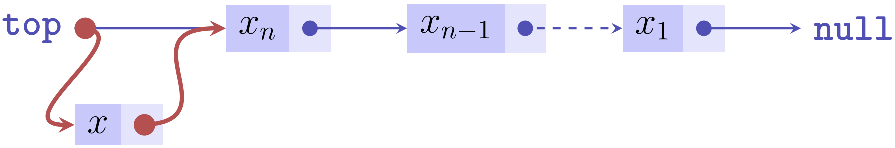
Wir erinnern uns[13] (Vorlesung Informatik I)

Ein *Stack* ist ein abstrakter Datentyp (ADT) mit Operationen

- $\texttt{push}(x, S)$: Legt Element x auf den Stapel S.
- $\texttt{pop}(S)$: Entfernt und liefert oberstes Element von S, oder `null`.
- $\texttt{top}(S)$: Liefert oberstes Element von S, oder `null`.
- $\texttt{isEmpty}(S)$: Liefert `true` wenn Stack leer, sonst `false`.
- $\texttt{emptyStack}()$: Liefert einen leeren Stack.

[13] hoffentlich

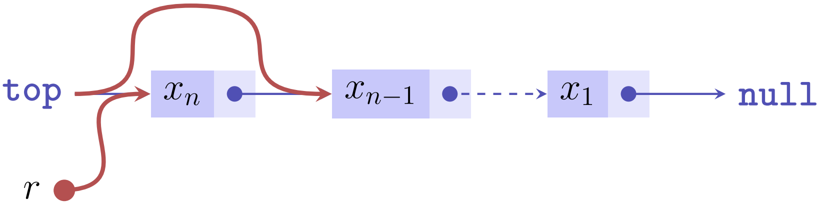
Implementation Push



push(x, S):

1. Erzeuge neues Listenelement mit x und Zeiger auf den Wert von **top**.
2. Setze **top** auf den Knotem mit x.

Implementation Pop



$\texttt{pop}(S)$:

1. Ist top=null, dann gib null zurück
2. Andernfalls merke Zeiger p von top in r.
3. Setze top auf $p.next$ und gib r zurück

Analyse

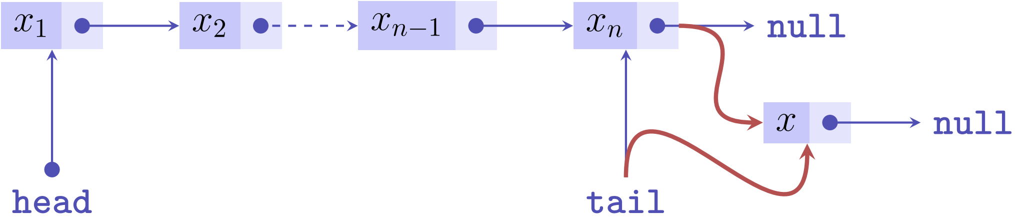
Jede der Operationen `push`, `pop`, `top` und `isEmpty` auf dem Stack ist in $\mathcal{O}(1)$ Schritten ausführbar.

Queue (Schlange / Warteschlange / Fifo)

Queue ist ein ADT mit folgenden Operationen:

- `enqueue`(x, Q): fügt x am Ende der Schlange an.
- `dequeue`(Q): entfernt x vom Beginn der Schlange und gibt x zurück (`null` sonst.)
- `head`(Q): liefert das Objekt am Beginn der Schlage zurück (`null` sonst.)
- `isEmpty`(Q): liefert `true` wenn Queue leer, sonst `false`.
- `emptyQueue`$()$: liefert leere Queue zurück.

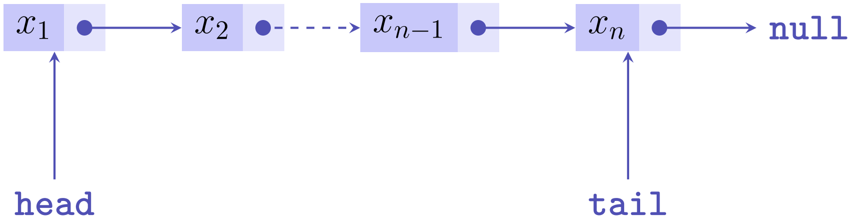
Implementation Queue



enqueue(x, S):

1. Erzeuge neues Listenelement mit x und Zeiger auf **null**.
2. Wenn **tail** $\neq$ **null** , setze **tail.next** auf den Knoten mit x.
3. Setze **tail** auf den Knoten mit x.
4. Ist **head** $=$ **null**, dann setze **head** auf **tail**.

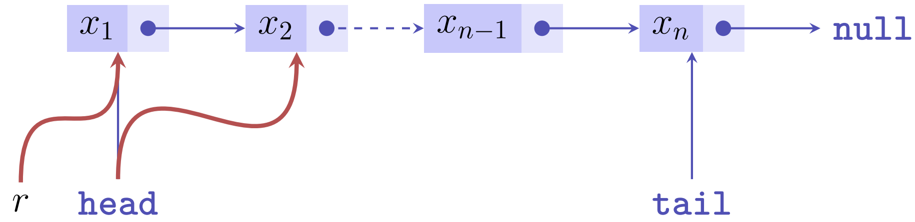
Invarianten!



Mit dieser Implementation gilt

- entweder $\texttt{head} = \texttt{tail} = \texttt{null}$,
- oder $\texttt{head} = \texttt{tail} \neq \texttt{null}$ und $\texttt{head.next} = \texttt{null}$
- oder $\texttt{head} \neq \texttt{null}$ und $\texttt{tail} \neq \texttt{null}$ und $\texttt{head} \neq \texttt{tail}$ und $\texttt{head.next} \neq \texttt{null}$.

Implementation Queue



dequeue(S):

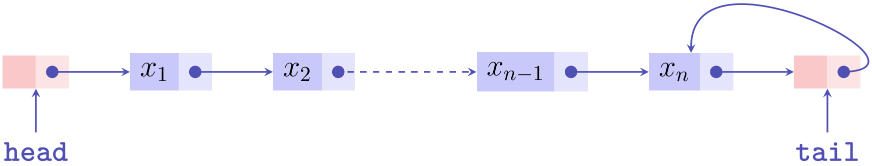
1. Merke Zeiger von **head** in r. Wenn $r = \texttt{null}$, gib r zurück.
2. Setze den Zeiger von **head** auf **head.next**.
3. Ist nun $\texttt{head} = \texttt{null}$, dann setze tail auf **null**.
4. Gib den Wert von r zurück.

Analyse

Jede der Operationen `enqueue`, `dequeue`, `head` und `isEmpty` auf der Queue ist in $\mathcal{O}(1)$ Schritten ausführbar.

Implementationsvarianten verketteter Listen

Liste mit Dummy-Elementen (Sentinels).

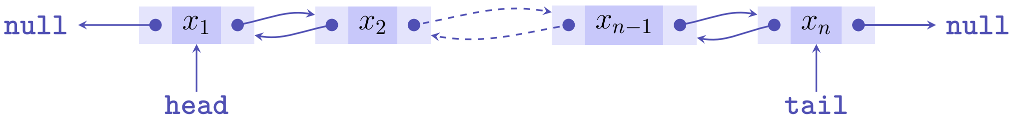


Vorteil: Weniger Spezialfälle!

Variante davon: genauso, dabei Zeiger auf ein Element immer einfach indirekt gespeichert.

Implementationsvarianten verketteter Listen

Doppelt verkettete Liste



Übersicht

	enqueue	insert	delete	search	concat
(A)	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
(B)	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
(C)	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
(D)	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$

(A) = Einfach verkettet
(B) = Einfach verkettet, mit Dummyelement
(C) = Einfach verkettet, mit einfach indirekter Elementaddressierung
(D) = Doppelt verkettet

Prioritätswarteschlange (Priority Queue)

Priority Queue = Warteschlange mit Prioritäten.

Operationen

- `insert(x,p,Q)`: Füge Objekt x mit Priorität p ein.
- `extractMax(Q)`: Entferne Objekt x mit höchster Priorität und liefere es.

Implementation Prioritätswarteschlage

Mit einem Max-Heap!

Also

- `insert` in Zeit $\mathcal{O}(\log n)$ und
- `extractMax` in Zeit $\mathcal{O}(\log n)$.

Multistack

Multistack unterstützt neben den oben genannten Stackoperationen noch

`multipop(s,S)`: Entferne die $\min(\text{size}(S), k)$ zuletzt eingefügten Objekte und liefere diese zurück.

Implementation wie beim Stack. Laufzeit von `multipop` ist $\mathcal{O}(k)$.

Akademische Frage

Führen wir auf einem Stack mit n Elementen n mal `multipop(k,S)` aus, kostet das dann $\mathcal{O}(n^2)$?

Sicher richtig, denn jeder `multipop` kann Zeit $\mathcal{O}(n)$ haben.

Wie machen wir es besser?

Idee (Accounting)

Wir führen ein Kostenmodell ein:

- Aufruf von `push`: kostet 1 CHF und zusätzlich 1 CHF kommt aufs Bankkonto
- Aufruf von `pop`: kostet 1 CHF, wird durch Rückzahlung vom Bankkonto beglichen.

Kontostand wird niemals negativ. Also: maximale Kosten: Anzahl der `push` Operationen mal zwei.

Formalisierung

Bezeichne t_i die realen Kosten der Operation i. Potentialfunktion $\Phi_i \geq 0$ für den “Kontostand” nach i Operationen. $\Phi_i \geq \Phi_0 \; \forall i$.

Amortisierte Kosten der i-ten Operation:

$$a_i := t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}) = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right) + \Phi_n - \Phi_0 \geq \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

Ziel: Suche Potentialfunktion, die teure Operationen ausgleicht.

Beispiel Stack

Potentialfunktion Φ_i = Anzahl Elemente auf dem Stack.

- `push`(x, S): Reale Kosten $t_i = 1$. $\Phi_i - \Phi_{i-1} = 1$. Amortisierte Kosten $a_i = 2$.
- `pop`(S): Reale Kosten $t_i = 1$. $\Phi_i - \Phi_{i-1} = -1$. Amortisierte Kosten $a_i = 0$.
- `multipop`(k, S): Reale Kosten $t_i = k$. $\Phi_i - \Phi_{i-1} = -k$. Amortisierte Kosten $a_i = 0$.

Alle Operationen haben *konstante amortisierte Kosten*! Im Durchschnitt hat also Multipop konstanten Zeitbedarf.

Beispiel binärer Zähler

Binärer Zähler mit k bits. Im schlimmsten Fall für jede Zähloperation maximal k Bitflips. Also $\mathcal{O}(n \cdot k)$ Bitflips für Zählen von 1 bis n. Geht das besser?

Reale Kosten t_i = Anzahl Bitwechsel von 0 nach 1 plus Anzahl Bitwechsel von 1 nach 0.

$$...0\underbrace{1111111}_{l \text{ Einsen}}+1 = ...1\underbrace{0000000}_{l \text{ Nullen}}.$$

$$\Rightarrow t_i = l + 1$$

Beispiel binärer Zähler

$$\ldots 0\underbrace{1111111}_{l \text{ Einsen}} + 1 = \ldots 1\underbrace{0000000}_{l \text{ Nullen}}$$

Potentialfunktion Φ_i: Anzahl der 1-Bits von x_i.

$$\Rightarrow \Phi_i - \Phi_{i-1} = 1 - l,$$

$$\Rightarrow a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} = l + 1 + (1 - l) = 2.$$

Amortisiert konstante Kosten für eine Zähloperation. ☺