8. Sortieren II

Heapsort, Quicksort, Mergesort

8.1 Heapsort

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.3, Cormen et al, Kap. 6]

Heapsort

Inspiration von Selectsort: Schnelles Einfügen

Inspiration von Insertionsort: Schnelles Finden der Position

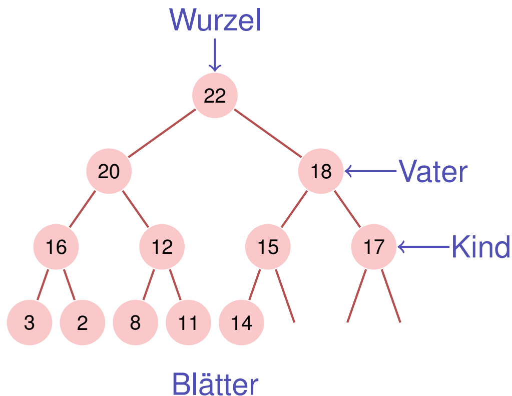
? Können wir das beste der beiden Welten haben?

! Ja, aber nicht ganz so einfach...

[Max-]Heap[6]

Binärer Baum mit folgenden Eigenschaften

1. vollständig, bis auf die letzte Ebene
2. Lücken des Baumes in der letzten Ebene höchstens rechts.
3. *Heap-Bedingung:* Max-(Min-)Heap: Schlüssel eines Kindes kleiner (grösser) als der des Vaters

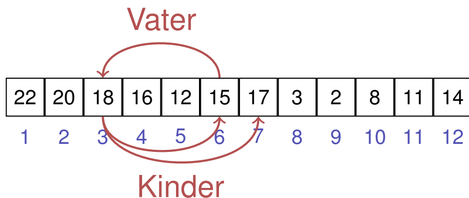


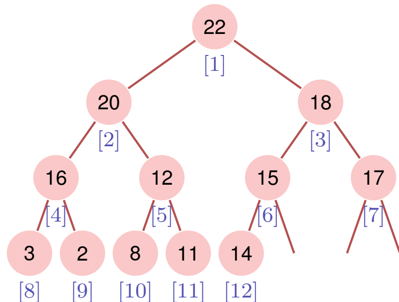
[6] Heap (Datenstruktur), nicht: wie in “Heap und Stack” (Speicherallokation)

Heap und Array

Baum $\rightarrow$ Array:

- Kinder$(i) = \{2i, 2i+1\}$
- Vater$(i) = \lfloor i/2 \rfloor$



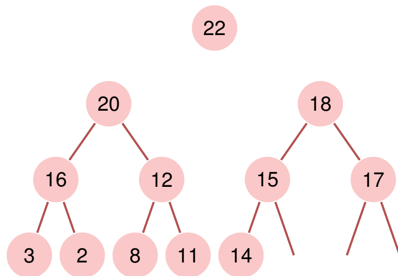


Abhängig von Startindex![7]

[7] Für Arrays, die bei 0 beginnen: $\{2i, 2i+1\} \rightarrow \{2i+1, 2i+2\}$, $\lfloor i/2 \rfloor \rightarrow \lfloor (i-1)/2 \rfloor$

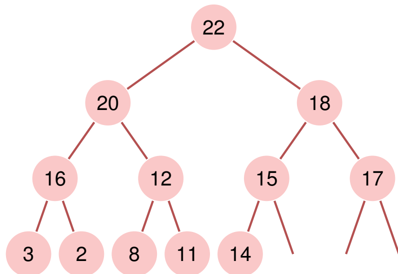
Rekursive Heap-Struktur

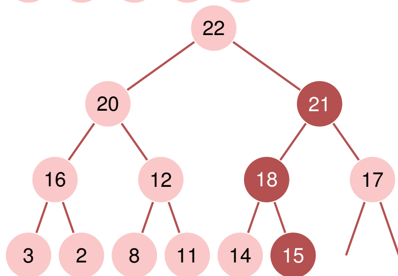
Ein Heap besteht aus zwei Teilheaps:



Einfügen

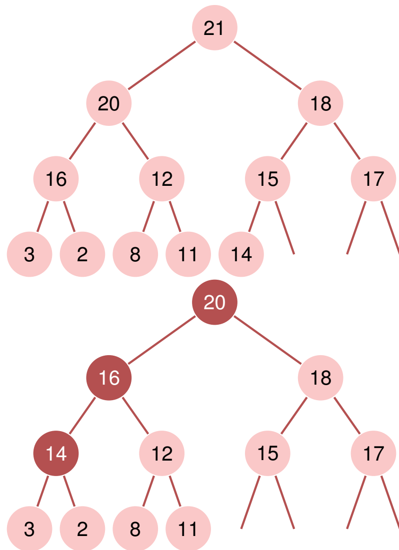
- Füge neues Element an erste freie Stelle ein. Verletzt Heap Eigenschaft potentiell.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Aufsteigen.
- Anzahl Operationen im schlechtesten Fall: $\mathcal{O}(\log n)$





Maximum entfernen

- Ersetze das Maximum durch das unterste rechte Element.
- Stelle Heap Eigenschaft wieder her: Sukzessives Absinken (in Richtung des grösseren Kindes).
- Anzahl Operationen im schlechtesten Fall: $\mathcal{O}(\log n)$



Algorithmus Versickern(A, i, m)

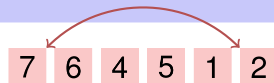
Input : Array A mit Heapstruktur für die Kinder von i. Letztes Element m.
Output : Array A mit Heapstruktur für i mit letztem Element m.

```
while 2i ≤ m do
    j ← 2i; // j linkes Kind
    if j < m and A[j] < A[j+1] then
        j ← j+1; // j rechtes Kind mit grösserem Schlüssel
    if A[i] < A[j] then
        swap(A[i], A[j])
        i ← j; // weiter versickern
    else
        i ← m; // versickern beendet
```

Heap Sortieren

$A[1,...,n]$ ist Heap.
Solange $n > 1$

- swap($A[1]$, $A[n]$)
- Versickere($A, 1, n-1$);
- $n \leftarrow n-1$



Tauschen $\Rightarrow$

Versickern $\Rightarrow$

Tauschen $\Rightarrow$

Versickern $\Rightarrow$

Tauschen $\Rightarrow$

Versickern $\Rightarrow$

Tauschen $\Rightarrow$

Versickern $\Rightarrow$

Tauschen $\Rightarrow$

Heap erstellen

Beobachtung: Jedes Blatt eines Heaps ist für sich schon ein korrekter Heap.

Folgerung: Induktion von unten!

Algorithmus HeapSort(A, n)

```
Input :   Array A der Länge n.
Output :  A sortiert.
for i ← n/2 downto 1 do
    Versickere(A, i, n);
// Nun ist A ein Heap.
for i ← n downto 2 do
    swap(A[1], A[i])
    Versickere(A, 1, i − 1)
// Nun ist A sortiert.
```

Analyse: Sortieren eines Heaps

Versickere durchläuft maximal $\log n$ Knoten. An jedem Knoten 2 Schlüsselvergleiche. $\Rightarrow$ Heap sortieren kostet im schlechtesten Fall $2n \log n$ Vergleiche.

Anzahl der Bewegungen vom Heap Sortieren auch $\mathcal{O}(n \log n)$.

Analyse: Heap bauen

Aufrufe an Versickern: $n/2$. Also Anzahl Vergleiche und Bewegungen $v(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$.

Versickerpfade aber im Mittel viel kürzer, also sogar:

$$v(n) = \sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil \cdot c \cdot h \in \mathcal{O}(n \sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{h}{2^h})$$

$s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ $(0 < x < 1)$. Mit $s(\frac{1}{2}) = 2$:

$$v(n) \in \mathcal{O}(n).$$

8.2 Mergesort

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.4, Cormen et al, Kap. 2.3],

Zwischenstand

Heapsort: $\mathcal{O}(n \log n)$ Vergleiche und Bewegungen.

Nachteile von Heapsort?

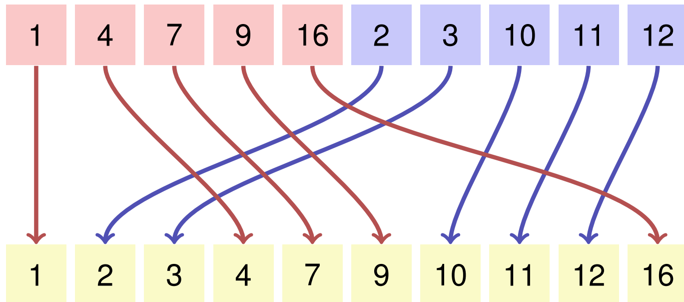
- Wenig Lokalität: per Definition springt Heapsort im sortierten Array umher (Negativer Cache Effekt).
- Zwei Vergleiche vor jeder benötigten Bewegung.

Mergesort (Sortieren durch Verschmelzen)

Divide and Conquer!

- Annahme: Zwei Hälften eines Arrays A bereits sortiert.
- Folgerung: Minimum von A kann mit 2 Vergleichen ermittelt werden.
- Iterativ: Sortierung des so vorsortierten A in $\mathcal{O}(n)$.

Merge



Algorithmus Merge(A, l, m, r)

Input : Array A der Länge n, Indizes $1 \leq l \leq m \leq r \leq n$. $A[l, \dots, m]$, $A[m+1, \dots, r]$ sortiert

Output : $A[l, \dots, r]$ sortiert

```
1  B ← new Array(r − l + 1)
2  i ← l; j ← m + 1; k ← 1
3  while i ≤ m and j ≤ r do
4      if A[i] ≤ A[j] then  B[k] ← A[i]; i ← i + 1
5      else  B[k] ← A[j]; j ← j + 1
6      k ← k + 1;
7  while i ≤ m do  B[k] ← A[i]; i ← i + 1; k ← k + 1
8  while j ≤ r do  B[k] ← A[j]; j ← j + 1; k ← k + 1
9  for k ← l to r do A[k] ← B[k − l + 1]
```

Korrektheit

Hypothese: Nach k Durchläufen der Schleife von Zeile 3 ist $B[1,\ldots,k]$ sortiert und $B[k] \leq A[i]$, falls $i \leq m$ und $B[k] \leq A[j]$ falls $j \leq r$.

Beweis per Induktion:
Induktionsanfang: Das leere Array $B[1,\ldots,0]$ ist trivialerweise sortiert.
Induktionsschluss ($k \to k+1$):

- oBdA $A[i] \leq A[j]$, $i \leq m, j \leq r$.
- $B[1,\ldots,k]$ ist nach Hypothese sortiert und $B[k] \leq A[i]$.
- Nach $B[k+1] \leftarrow A[i]$ ist $B[1,\ldots,k+1]$ sortiert.
- $B[k+1] = A[i] \leq A[i+1]$ (falls $i+1 \leq m$) und $B[k+1] \leq A[j]$ falls $j \leq r$.
- $k \leftarrow k+1, i \leftarrow i+1$: Aussage gilt erneut.

Analyse (Merge)

Lemma

Wenn: Array A *der Länge* n*, Indizes* $1 \leq l < r \leq n$*.* $m = \lfloor (l+r)/2 \rfloor$ *und* $A[l, \ldots, m]$*,* $A[m+1, \ldots, r]$ *sortiert.*
Dann: im Aufruf Merge(A, l, m, r*) werden* $\Theta(r-l)$ *viele Schlüsselbewegungen und Vergleiche durchgeführt.*

Beweis: (Inspektion des Algorithmus und Zählen der Operationen).

Mergesort

5 2 6 1 8 4 3 9

[5 2 6 1] [8 4 3 9] — Split

[5 2] [6 1] [8 4] [3 9] — Split

[5] [2] [6] [1] [8] [4] [3] [9] — Split

[2 5] [1 6] [4 8] [3 9] — Merge

[1 2 5 6] [3 4 8 9] — Merge

1 2 3 4 5 6 8 9 — Merge

Algorithmus Rekursives 2-Wege Mergesort(A, l, r)

Input : Array A der Länge n. $1 \leq l \leq r \leq n$
Output : Array $A[l, \dots, r]$ sortiert.

if $l < r$ **then**
    $m \leftarrow \lfloor (l + r)/2 \rfloor$ // Mittlere Position
    Mergesort(A, l, m) // Sortiere vordere Hälfte
    Mergesort($A, m + 1, r$) // Sortiere hintere Hälfte
    Merge(A, l, m, r) // Verschmelzen der Teilfolgen

Analyse

Rekursionsgleichung für die Anzahl Vergleiche und Schlüsselbewegungen:

$$C(n) = C(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) + C(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + \Theta(n) \in \Theta(n \log n)$$

Algorithmus StraightMergesort(A)

Rekursion vermeiden: Verschmelze Folgen der Länge $1, 2, 4...$ direkt

Input : Array A der Länge n
Output : Array A sortiert

```
length ← 1
while length < n do                          // Iteriere über die Längen n
    right ← 0
    while right + length < n do              // Iteriere über die Teilfolgen
        left ← right + 1
        middle ← left + length − 1
        right ← min(middle + length, n)
        Merge(A, left, middle, right)
    length ← length · 2
```

Analyse

Wie rekursives Mergesort führt reines 2-Wege-Mergesort immer $\Theta(n \log n)$ viele Schlüsselvergleiche und -bewegungen aus.

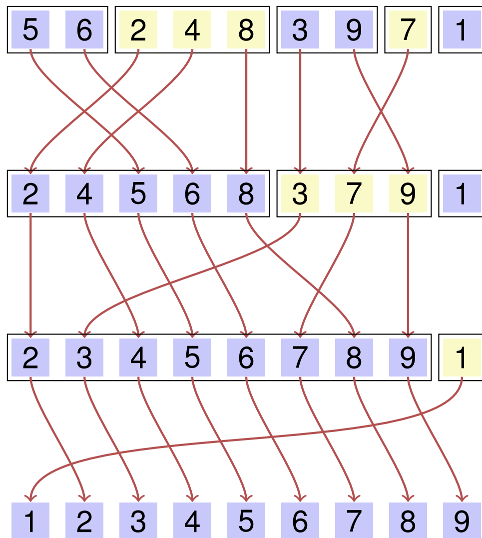
Natürliches 2-Wege Mergesort

Beobachtung: Obige Varianten nutzen nicht aus, wenn vorsortiert ist und führen immer $\Theta(n \log n)$ viele Bewegungen aus.

? Wie kann man teilweise vorsortierte Folgen besser sortieren?

! Rekursives Verschmelzen von bereits vorsortierten Teilen (*Runs*) *von* A.

Natürliches 2-Wege Mergesort



Algorithmus NaturalMergesort(A)

```
Input :   Array A der Länge n > 0
Output :  Array A sortiert
repeat
    r ← 0
    while r < n do
        l ← r + 1
        m ← l; while m < n and A[m + 1] ≥ A[m] do m ← m + 1
        if m < n then
            r ← m + 1; while r < n and A[r + 1] ≥ A[r] do r ← r + 1
            Merge(A, l, m, r);
        else
            r ← n
until l = 1
```

Analyse

Im besten Fall führt natürliches Mergesort nur $n - 1$ Vergleiche durch!

? Ist es auch im Mittel asymptotisch besser als StraightMergesort?

! Nein. Unter Annahme der Gleichverteilung der paarweise unterschiedlichen Schlüssel haben wir im Mittel $n/2$ Stellen i mit $k_i > k_{i+1}$, also $n/2$ Runs und sparen uns lediglich einen Durchlauf, also n Vergleiche.

Natürliches Mergesort führt im schlechtesten und durchschnittlichen Fall $\Theta(n \log n)$ viele Vergleiche und Bewegungen aus.

8.3 Quicksort

[Ottman/Widmayer, Kap. 2.2, Cormen et al, Kap. 7]

Quicksort

? Was ist der Nachteil von Mergesort?

! Benötigt $\Theta(n)$ Speicherplatz für das Verschmelzen.

? Wie könnte man das Verschmelzen einsparen?

! Sorge dafür, dass jedes Element im linken Teil kleiner ist als im rechten Teil.

? Wie?

! Pivotieren und Aufteilen!

Quicksort (willkürlicher Pivot)

2	4	5	6	8	3	7	9	1
2	1	3	6	8	5	7	9	4
1	2	3	4	5	8	7	9	6
1	2	3	4	5	6	7	9	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Algorithmus Quicksort($A[l, \dots, r]$

Input : Array A der Länge n. $1 \leq l \leq r \leq n$.
Output : Array A, sortiert zwischen l und r.

if $l < r$ **then**
    Wähle Pivot $p \in A[l, \dots, r]$
    $k \leftarrow$ Partition$(A[l, \dots, r], p)$
    Quicksort$(A[l, \dots, k-1])$
    Quicksort$(A[k+1, \dots, r])$

Zur Erinnerung: Algorithmus Partition($A[l, \dots, r], p$)

Input : Array A, welches den Sentinel p im Intervall $[l, r]$ mindestens einmal enthält.
Output : Array A partitioniert um p. Rückgabe der Position von p.

while $l < r$ **do**
- **while** $A[l] < p$ **do**
  - $l \leftarrow l + 1$
- **while** $A[r] > p$ **do**
  - $r \leftarrow r - 1$
- swap($A[l]$, $A[r]$)
- **if** $A[l] = A[r]$ **then** // Nur für nicht paarweise verschiedene Schlüssel
  - $l \leftarrow l + 1$

return l-1

Analyse: Anzahl Vergleiche

Bester Fall. Pivotelement = Median; Anzahl Vergleiche:

$$T(n) = 2T(n/2) + c \cdot n,\ T(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$$

Schlechtester Fall. Pivotelement = Minimum oder Maximum; Anzahl Vergleiche:

$$T(n) = T(n-1) + c \cdot n,\ T(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(n) \in \Theta(n^2)$$

Analyse: Anzahl Vertauschungen

Resultat eines Aufrufes an Partition (Pivot 3):

2 1 3 6 8 5 7 9 4

? Wie viele Vertauschungen haben hier maximal stattgefunden?

! 2. Die maximale Anzahl an Vertauschungen ist gegeben durch die Anzahl Schlüssel im kleineren Bereich.

Analyse: Anzahl Vertauschungen

Gedankenspiel

- Jeder Schlüssel aus dem kleineren Bereich zahlt bei einer Vertauschung eine Münze.
- Wenn ein Schlüssel eine Münze gezahlt hat, ist der Bereich, in dem er sich befindet maximal halb so gross wie zuvor.
- Jeder Schlüssel muss also maximal $\log n$ Münzen zahlen. Es gibt aber nur n Schlüssel.

Folgerung: Es ergeben sich $\mathcal{O}(n \log n)$ viele Schlüsselvertauschungen im schlechtesten Fall!

Randomisiertes Quicksort

Quicksort wird trotz $\Theta(n^2)$ Laufzeit im schlechtesten Fall oft eingesetzt.

Grund: Quadratische Laufzeit unwahrscheinlich, sofern die Wahl des Pivots und die Vorsortierung nicht eine ungünstige Konstellation aufweisen.

Vermeidung: Zufälliges Ziehen eines Pivots. Mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus $[l, r]$.

Analyse (Randomisiertes Quicksort)

Erwartete Anzahl verglichener Schlüssel bei Eingabe der Länge n:

$$T(n) = (n-1) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(T(k-1) + T(n-k)\right), \; T(0) = T(1) = 0$$

Behauptung $T(n) \leq 4n \log n$.

Beweis per Induktion:

Induktionsanfang: klar für $n = 0$ (mit $0 \log 0 := 0$) und für $n = 1$.

Hypothese: $T(n) \leq 4n \log n$ für ein n.

Induktionsschritt: $(n - 1 \to n)$

Analyse (Randomisiertes Quicksort)

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n-1+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T(k) \overset{\text{H}}{\leq} n-1+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}4k\log k\\
&= n-1+\sum_{k=1}^{n/2}4k\underbrace{\log k}_{\leq \log n-1}+\sum_{k=n/2+1}^{n-1}4k\underbrace{\log k}_{\leq \log n}\\
&\leq n-1+\frac{8}{n}\left((\log n-1)\sum_{k=1}^{n/2}k+\log n\sum_{k=n/2+1}^{n-1}k\right)\\
&= n-1+\frac{8}{n}\left((\log n)\cdot\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n}{4}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)\\
&= 4n\log n-4\log n-3 \leq 4n\log n
\end{aligned}
$$

Analyse (Randomisiertes Quicksort)

Theorem

Im Mittel benötigt randomisiertes Quicksort $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ *Vergleiche.*

Praktische Anmerkungen

Rekursionstiefe im schlechtesten Fall: $n-1$[8]. Dann auch Speicherplatzbedarf $\mathcal{O}(n)$.

Kann vermieden werden: Rekursion nur auf dem kleineren Teil. Dann garantiert $\mathcal{O}(\log n)$ Rekursionstiefe und Speicherplatzbedarf.

[8] Stack-Overflow möglich!

Quicksort mit logarithmischem Speicherplatz

Input : Array A der Länge n. $1 \leq l \leq r \leq n$.
Output : Array A, sortiert zwischen l und r.

```
while l < r do
    Wähle Pivot p ∈ A[l,...,r]
    k ← Partition(A[l,...,r], p)
    if k − l < r − k then
        Quicksort(A[l,...,k − 1])
        l ← k + 1
    else
        Quicksort(A[k + 1,...,r])
        r ← k − 1
```

Der im ursprünglichen Algorithmus verbleibende Aufruf an Quicksort($A[l, \ldots, r]$) geschieht iterativ (Tail Recursion ausgenutzt!): die If-Anweisung wurde zur While Anweisung.

Praktische Anmerkungen

Für den Pivot wird in der Praxis oft der Median von drei Elementen genommen. Beispiel: Median3($A[l], A[r], A[\lfloor l + r/2 \rfloor]$).

Es existiert eine Variante von Quicksort mit konstanten Speicherplatzbedarf. Idee: Zwischenspeichern des alten Pivots am Ort des neuen Pivots.