4. Suchen

Lineare Suche, Binäre Suche, Interpolationssuche, Exponentielle Suche, Untere Schranken [Ottman/Widmayer, Kap. 3.2, Cormen et al, Kap. 2: Problems 2.1-3,2.2-3,2.3-5]

Das Suchproblem

Gegeben

- Menge von Datensätzen.

Beispiele

Telefonverzeichnis, Wörterbuch, Symboltabelle

- Jeder Datensatz hat einen Schlüssel k.
- Schlüssel sind vergleichbar: eindeutige Antwort auf Frage $k_1 \le k_2$ für Schlüssel k_1, k_2.

Aufgabe: finde Datensatz nach Schlüssel k.

Das Auswahlproblem

Gegeben

- Menge von Datensätzen mit vergleichbaren Schlüsseln k.

Gesucht: Datensatz, mit dem kleinsten, grössten, mittleren Schlüssel. Allgemein: finde Datensatz mit i-kleinstem Schlüssel.

Suche in Array

Gegeben

- Array A mit n Elementen $(A[1], \dots, A[n])$.
- Schlüssel b

Gesucht: Index k, $1 \leq k \leq n$ mit $A[k] = b$ oder "nicht gefunden".

22	20	32	10	35	24	42	38	28	41
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Lineare Suche

Durchlaufen des Arrays von $A[1]$ bis $A[n]$.

- *Bestenfalls* 1 Vergleich.
- *Schlimmstenfalls* n Vergleiche.
- Annahme: Jede Anordnung der n Schlüssel ist gleichwahrscheinlich. *Erwartete* Anzahl Vergleiche:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}.$$

Suche in sortierten Array

Gegeben

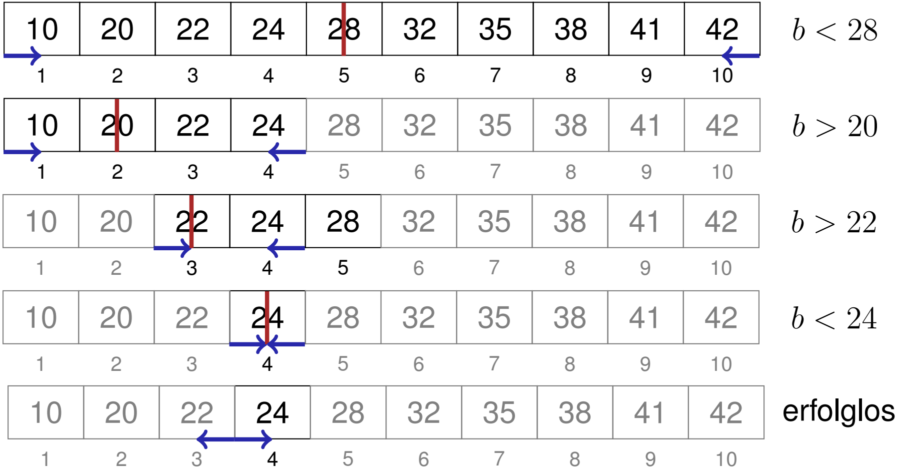
- Sortiertes Array A mit n Elementen $(A[1], \ldots, A[n])$ mit $A[1] \leq A[2] \leq \cdots \leq A[n]$.
- Schlüssel b

Gesucht: Index k, $1 \leq k \leq n$ mit $A[k] = b$ oder ”nicht gefunden”.

10	20	22	24	28	32	35	38	41	42
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Divide and Conquer!

Suche $b = 23$.



Binärer Suchalgorithmus `BSearch(A,b,l,r)`

Input : Sortiertes Array A von n Schlüsseln. Schlüssel b. Bereichsgrenzen $1 \leq l \leq r \leq n$ oder $l > r$ beliebig.
Output : Index des gefundenen Elements. 0, wenn erfolglos.

$m \leftarrow \lfloor (l+r)/2 \rfloor$
if $l > r$ **then** // erfolglose Suche
    return 0
else if $b = A[m]$ **then** // gefunden
    return m
else if $b < A[m]$ **then** // Element liegt links
    return BSearch$(A, b, l, m-1)$
else // $b > A[m]$: Element liegt rechts
    return BSearch$(A, b, m+1, r)$

Analyse (Schlimmster Fall)

Rekurrenz ($n = 2^k$)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Teleskopieren:

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + c = T\left(\frac{n}{4}\right) + 2c \\ &= T\left(\frac{n}{2^i}\right) + i \cdot c \\ &= T\left(\frac{n}{n}\right) + \log_2 n \cdot c. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Annahme: $T(n) = d + c \log_2 n$

Analyse (Schlimmster Fall)

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{falls } n = 1, \\ T(n/2) + c & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Vermutung : $T(n) = d + c \cdot \log_2 n$

Beweis durch Induktion:

- Induktionsanfang: $T(1) = d$.
- Hypothese: $T(n/2) = d + c \cdot \log_2 n/2$
- Schritt $(n/2 \to n)$

$$T(n) = T(n/2) + c = d + c \cdot (\log_2 n - 1) + c = d + c \log_2 n.$$

Resultat

Theorem

Der Algorithmus zur binären sortierten Suche benötigt $\Theta(\log n)$ *Elementarschritte.*

Iterativer binärer Suchalgorithmus

Input : Sortiertes Array A von n Schlüsseln. Schlüssel b.
Output : Index des gefundenen Elements. 0, wenn erfolglos.

```
l ← 1; r ← n
while l ≤ r do
    m ← ⌊(l + r)/2⌋
    if A[m] = b then
        return m
    else if A[m] < b then
        l ← m + 1
    else
        r ← m − 1
return 0;
```

Korrektheit

Algorithmus bricht nur ab, falls A leer oder b gefunden.

Invariante: Falls b in A, dann im Bereich $A[l, ..., r]$

Beweis durch Induktion

- Induktionsanfang: $b \in A[1, .., n]$ (oder nicht)
- Hypothese: Invariante gilt nach i Schritten
- Schritt:
  $b < A[m] \Rightarrow b \in A[l, .., m-1]$
  $b > A[m] \Rightarrow b \in A[m+1, .., r]$

Geht es noch besser?

Annahme: Gleichverteilung der *Werte* im Array.

Beispiel

Name ”Becker” würde man im Telefonbuch vorne suchen.
”Wawrinka" wohl ziemlich weit hinten.
Binäre Suche vergleicht immer zuerst mit der Mitte.

Binäre Suche setzt immer $m = \left\lfloor l + \frac{r-l}{2} \right\rfloor$.

Interpolationssuche

Erwartete relative Position von b im Suchintervall $[l, r]$

$$\rho = \frac{b - A[l]}{A[r] - A[l]} \in [0, 1].$$

Neue "Mitte": $l + \rho \cdot (r - l)$

Anzahl Vergleiche im Mittel $\mathcal{O}(\log \log n)$ (ohne Beweis).

? Ist Interpolationssuche also immer zu bevorzugen?

! Nein: Anzahl Vergleiche im schlimmsten Fall $\Omega(n)$.

Exponentielle Suche

Annahme: Schlüssel b liegt eher vorne im Array A. n sehr gross.

Exponentielles Vorgehen:

1. Lege Suchbereich $l = 1$, $r = 1$ fest.
2. Verdopple r so lange, bis $r > n$ oder $A[r] > b$.
3. Setze $r \leftarrow \min(r, n)$.
4. Führe binäre Suche durch mit $l \leftarrow r/2$, r.

Analyse der Exponentiellen Suche

Sei m der gesuchte Index.

Anzahl Schritte für die Verdopplung von r: maximal $\log_2 m$.
Binäre Suche ist dann auch $\mathcal{O}(\log_2 m)$.

Schlechtester Fall ingesamt: Anzahl Schritte $\mathcal{O}(\log_2 n)$.

? Wann ist dieses Verfahren sinnvoll?

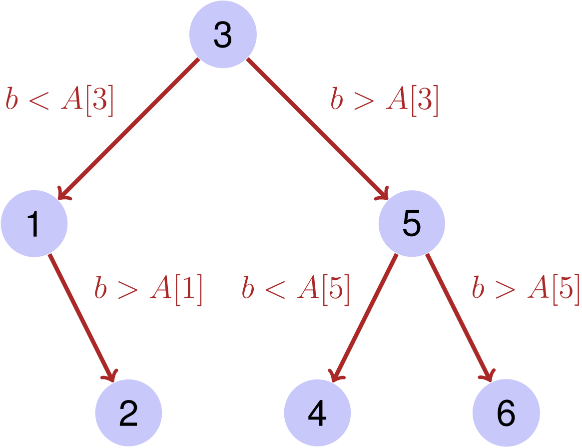
! Wenn $m << n$. Zum Beispiel bei positiven ganzzahligen paarweise verschiedenen Schlüsseln und $b << N$ (N: grösster Schlüsselwert).

Untere Schranke

Binäre und exponentielle Suche (im schlechtesten Fall): $\Theta(\log n)$ viele Vergleiche.

Gilt für *jeden* Suchalgorithms in sortiertem Array (im schlechtesten Fall): Anzahl Vergleiche = $\Omega(\log n)$?

Entscheidungsbaum



- Für jede Eingabe $b = A[i]$ muss Algorithmus erfolgreich sein $\Rightarrow$ Baum enthält mindestens n Knoten.
- Anzahl Vergleiche im schlechtesten Fall = Höhe des Baumes = maximale Anzahl Knoten von Wurzel zu Blatt.

Entscheidungsbaum

Binärer Baum der Höhe h hat höchstens
$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{h-1} = 2^h - 1 < 2^h$ Knoten.

Mindestens n Knoten im Entscheidungsbaum mit Höhe h.

$n < 2^h \Rightarrow h > \log_2 n$.

Anzahl Entscheidungen = $\Omega(\log n)$.

Theorem

Jeder Algorithmus zur Suche in sortierten Daten der Länge n benötigt im schlechtesten Fall $\Omega(\log n)$ Vergleichsschritte.

Untere Schranke für Suchen in unsortiertem Array

Theorem

Jeder Algorithmus zur Suche in unsortierten Daten der Länge n benötigt im schlechtesten Fall $\Omega(n)$ Vergleichsschritte.

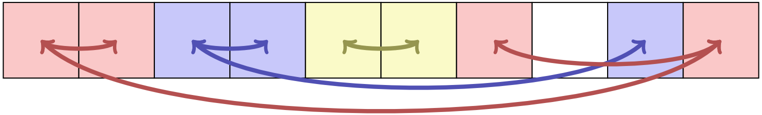
Versuch

Korrekt?

”Beweis”: Um b in A zu finden, muss b mit jedem Element $A[i]$ $(1 \leq i \leq n)$ verglichen werden.

Falsch! Vergleiche zwischen Elementen von A möglich!

Besseres Argument



- i Vergleiche ohne b und e Vergleiche mit b
- Vergleiche erzeugen g Gruppen. Initial $g = n$.
- Verbinden zweier Gruppen benötigt mindestens einen Vergleich: $n - g \leq i$.
- Mindestens ein Element pro Gruppe muss mit b verglichen werden: $e \geq g$.
- Anzahl Vergleiche $i + e \geq n - g + g = n$.

5. Auswählen

Das Auswahlproblem, Randomisierte Berechnung des Medians, Lineare Worst-Case Auswahl [Ottman/Widmayer, Kap. 3.1, Cormen et al, Kap. 9]

Min und Max

? Separates Finden von Minimum und Maximum in $(A[1], \ldots, A[n])$ benötigt insgesamt $2n$ Vergleiche. (Wie) geht es mit weniger als $2n$ Vergleichen für beide gemeinsam?

! Es geht mit $\frac{3}{2}N$ Vergleichen: Vergleiche jeweils 2 Elemente und deren kleineres mit Min und grösseres mit Max.

Das Auswahlproblem

Eingabe

- Unsortiertes Array $A = (A_1, \dots, A_n)$ paarweise verschiedener Werte
- Zahl $1 \leq k \leq n$.

Ausgabe: $A[i]$ mit $|\{j : A[j] < A[i]\}| = k - 1$

Spezialfälle

$k = 1$: Minimum: Algorithmus mit n Vergleichsoperationen trivial.
$k = n$: Maximum: Algorithmus mit n Vergleichsoperationen trivial.
$k = \lfloor n/2 \rfloor$: Median.

Ansätze

- Wiederholt das Minimum entfernen / auslesen: $\mathcal{O}(k \cdot n)$. Median: $\mathcal{O}(n^2)$
- Sortieren (kommt bald): $\mathcal{O}(n \log n)$
- Pivotieren $\mathcal{O}(n)$!

Pivotieren

1. Wähle ein Element p als Pivotelement
2. Teile A in zwei Teile auf, den Rang von p bestimmend.
3. Rekursion auf dem relevanten Teil. Falls $k = r$, dann gefunden.

$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	p	$>$	$>$	$>$	$>$
1					r				n

Algorithmus Partition($A[l..r], p$)

Input : Array A, welches den Sentinel p im Intervall $[l, r]$ mindestens einmal enthält.
Output : Array A partitioniert in $[l..r]$ um p. Rückgabe der Position von p.

```
while l < r do
    while A[l] < p do
        l ← l + 1
    while A[r] > p do
        r ← r − 1
    swap(A[l], A[r])
    if A[l] = A[r] then
        l ← l + 1
return l-1
```

Korrektheit: Invariante

Invariante I: $A_i \leq p \; \forall i \in [0, l)$, $A_i > p \; \forall i \in (r, n]$, $\exists k \in [l, r] : A_k = p$.

while $l < r$ **do**

I

  while $A[l] < p$ **do**
    $l \leftarrow l + 1$

I und $A[l] \geq p$

  while $A[r] > p$ **do**
    $r \leftarrow r - 1$

I und $A[r] \leq p$

  swap$(A[l], A[r])$

I und $A[l] \leq p \leq A[r]$

  if $A[l] = A[r]$ **then**
    $l \leftarrow l + 1$

I

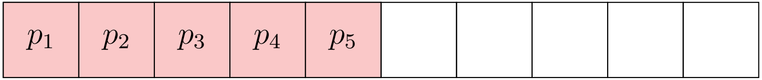
return l-1

Korrektheit: Fortschritt

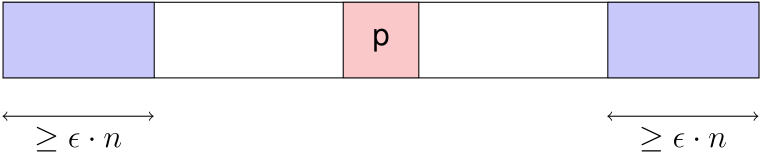
while $l < r$ **do**	
while $A[l] < p$ **do**	Fortschritt wenn $A[l] < p$
$l \leftarrow l + 1$	
while $A[r] > p$ **do**	Fortschritt wenn $A[r] > p$
$r \leftarrow r - 1$	
swap($A[l]$, $A[r]$)	Fortschritt wenn $A[l] > p$ oder $A[r] < p$
if $A[l] = A[r]$ **then**	Fortschritt wenn $A[l] = A[r] = p$
$l \leftarrow l + 1$	
return l-1	

Wahl des Pivots

Das Minimum ist ein schlechter Pivot: worst Case $\Theta(n^2)$



Ein guter Pivot hat linear viele Elemente auf beiden Seiten.



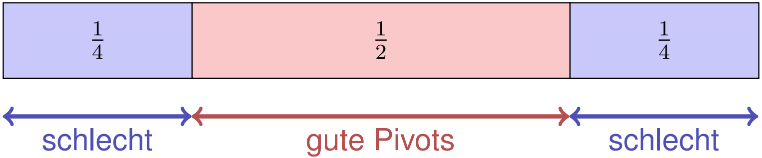
Analyse

Unterteilung mit Faktor q ($0 < q < 1$): zwei Gruppen mit $q \cdot n$ und $(1-q) \cdot n$ Elementen (ohne Einschränkung $q \geq 1-q$).

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq T(q \cdot n) + c \cdot n \\
&= c \cdot n + q \cdot c \cdot n + T(q^2 \cdot n) = \ldots = c \cdot n \sum_{i=0}^{\log_q(n)-1} q^i + T(1) \\
&\leq c \cdot n \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} q^i}_{\text{geom. Reihe}} = c \cdot n \cdot \frac{1}{1-q} = \mathcal{O}(n)
\end{aligned}
$$

Wie bekommen wir das hin?

Der Zufall hilft uns (Tony Hoare, 1961). Wähle in jedem Schritt einen zufälligen Pivot.



Wahrscheinlichkeit für guten Pivot nach einem Versuch: $\frac{1}{2} =: \rho$.

Wahrscheinlichkeit für guten Pivot nach k Versuchen: $(1-\rho)^{k-1} \cdot \rho$.

Erwartungswert der geometrischen Verteilung: $1/\rho = 2$

[Erwartungswert der geometrischen Verteilung]

Zufallsvariable $X \in \mathbb{N}^+$ mit $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$.

Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot (1-q) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} - k \cdot q^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot q^k - k \cdot q^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Algorithmus Quickselect ($A[l..r], i$)

Input : Array A der Länge n. Indizes $1 \leq l \leq i \leq r \leq n$, so dass für alle $x \in A[l..r]$ gilt, dass $|\{j|A[j] \leq x\}| \geq l$ und $|\{j|A[j] \leq x\}| \leq r$.
Output : Partitioniertes Array A, so dass $|\{j|A[j] \leq A[i]\}| = i$

if l=r **then** return;
repeat
    wähle zufälligen Pivot $x \in A[l..r]$
    $p \leftarrow l$
    for $j = l$ **to** r **do**
        if $A[j] \leq x$ **then** $p \leftarrow p + 1$
until $\frac{l+r}{4} \leq p \leq \frac{3(l+r)}{4}$
$m \leftarrow$ Partition$(A[l..r], x)$
if $i < m$ **then**
    quickselect$(A[l..m], i)$
else
    quickselect$(A[m..r], i)$

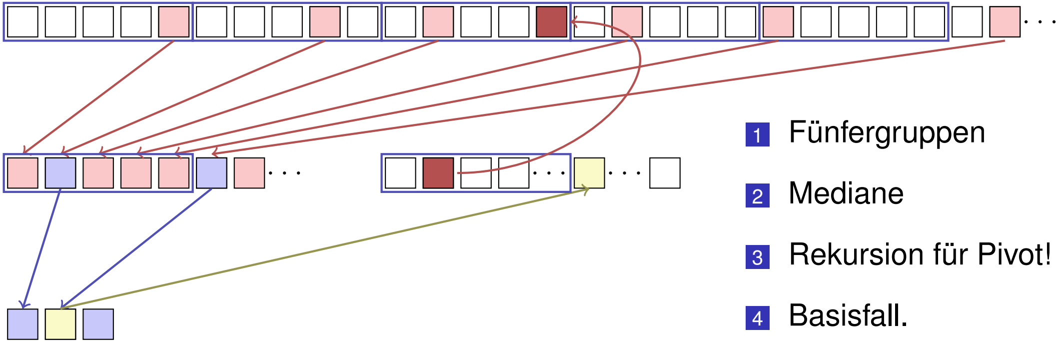
Median der Mediane

Ziel: Finde einen Algorithmus, welcher im schlechtesten Fall nur linear viele Schritte benötigt.

Algorithmus Select (k-smallest)

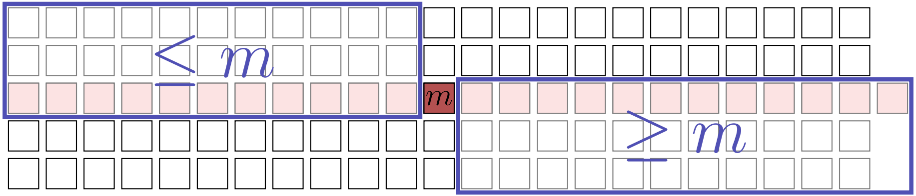
- Fünfergruppen bilden.
- Median jeder Gruppe bilden (naiv).
- Select rekursiv auf den Gruppenmedianen.
- Partitioniere das Array um den gefundenen Median der Mediane. Resultat: i
- Wenn $i = k$, Resultat. Sonst: Select rekursiv auf der richtigen Seite.

Median der Mediane



1. Fünfergruppen
2. Mediane
3. Rekursion für Pivot!
4. Basisfall.
5. Pivot (Level 1)
6. Partition (Level 1)
7. Median = Pivot Level 0
8. 2. Rekursion startet

Was bringt das?



Anzahl Punkte links / rechts vom Median der Mediane (ohne Mediangruppe und ohne Restgruppe) $\geq 3 \cdot (\lceil \frac{1}{2} \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2) \geq \frac{3n}{10} - 6$

Zweiter Aufruf mit maximal $\lceil \frac{7n}{10} + 6 \rceil$ Elementen.

Analyse

Rekursionsungleichung:

$$T(n) \leq T\left(\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil\right) + T\left(\left\lceil\frac{7n}{10} + 6\right\rceil\right) + d \cdot n.$$

mit einer Konstanten d.

Behauptung:

$$T(n) = \mathcal{O}(n).$$

Beweis

Induktionsanfang: Wähle c so gross, dass

$$T(n) \leq c \cdot n \text{ für alle } n \leq n_0.$$

Induktionsannahme:

$$T(i) \leq c \cdot i \text{ für alle } i < n.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lceil \frac{7n}{10} + 6 \right\rceil\right) + d \cdot n \\ &= c \cdot \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + c \cdot \left\lceil \frac{7n}{10} + 6 \right\rceil + d \cdot n. \end{aligned}$$

Beweis

Induktionsschritt:

$$T(n) \le c \cdot \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + c \cdot \left\lceil \frac{7n}{10} + 6 \right\rceil + d \cdot n$$
$$\le c \cdot \frac{n}{5} + c + c \cdot \frac{7n}{10} + 6c + c + d \cdot n = \frac{9}{10} \cdot c \cdot n + 8c + d \cdot n.$$

Wähle $c \ge 80 \cdot d$ und $n_0 = 91$.

$$T(n) \le \frac{72}{80} \cdot c \cdot n + 8c + \frac{1}{80} \cdot c \cdot n = c \cdot \underbrace{\left(\frac{73}{80} n + 8 \right)}_{\le n \text{ für } n > n_0} \le c \cdot n.$$

Resultat

Theorem

Das i-te Element einer Folge von n Elementen kann in höchstens $\mathcal{O}(n)$ Schritten gefunden werden.

Überblick

1.	Wiederholt Minimum finden	$\mathcal{O}(n^2)$
2.	Sortieren und $A[i]$ ausgeben	$\mathcal{O}(n \log n)$
3.	Quickselect mit zufälligem Pivot	$\mathcal{O}(n)$ im Mittel
4.	Median of Medians (Blum)	$\mathcal{O}(n)$ im schlimmsten Fall