26. Geometrische Algorithmen

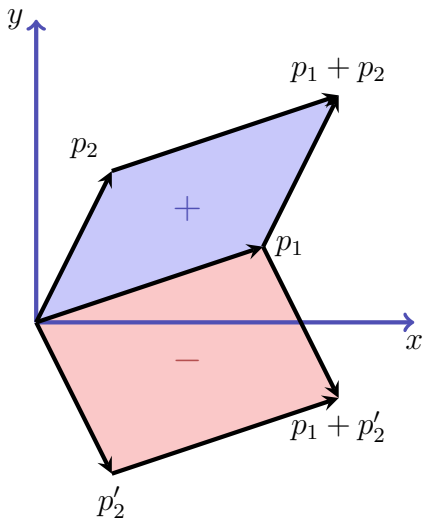
Lage von Strecken, Schnitt vieler Strecken, Konvexe Hülle, Dichtestes Punktepaar [Ottman/Widmayer, Kap. 8.2,8.3,8.8.2, Cormen et al, Kap. 33]

Eigenschaften von Strecken

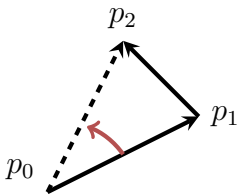
Kreuzprodukt zweier Vektoren $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ in der Ebene

$$p_1 \times p_2 = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Vorzeichenbehafteter Flächeninhalt des Parallelogramms

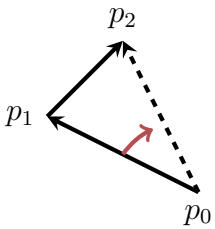


Abbiegerichtung



nach links:

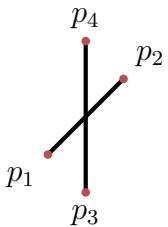
$(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0) > 0$



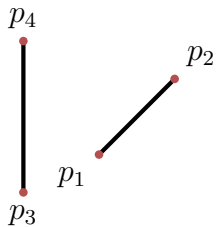
nach rechts:

$(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0) < 0$

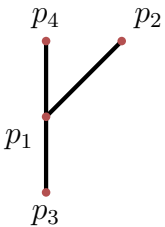
Schnitt zweier Strecken



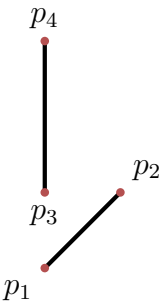
Schnitt: p_1 und p_2 gegenüber bzgl. $\overline{p_3p_4}$ und p_3, p_4 gegenüber bzgl. $\overline{p_1p_2}$



Kein Schnitt: p_1 und p_2 auf der gleichen Seite von $\overline{p_3p_4}$

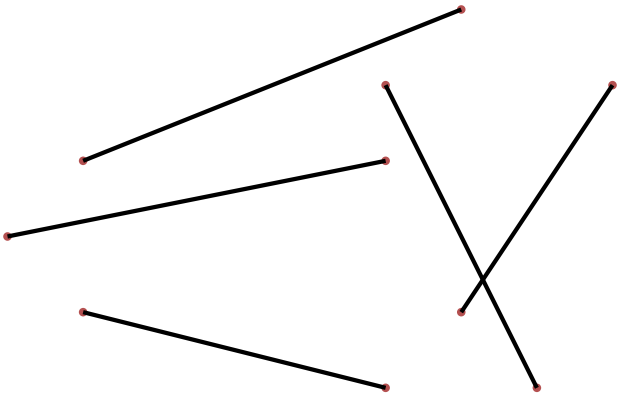


Schnitt: p_1 auf $\overline{p_3p_4}$

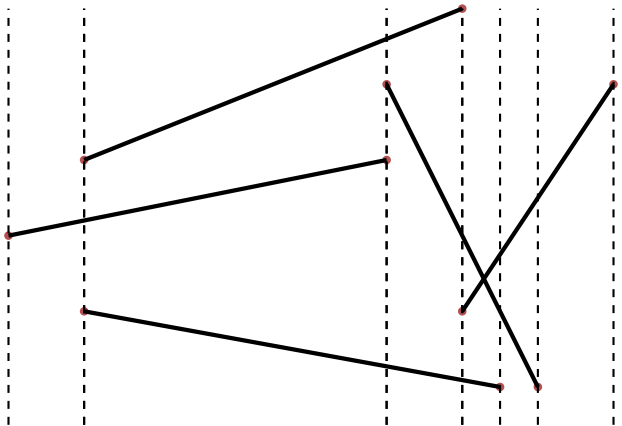


Kein Schnitt: p_3 und p_4 auf der gleichen Seite von $\overline{p_1p_2}$

Schnittpunkt vieler Strecken



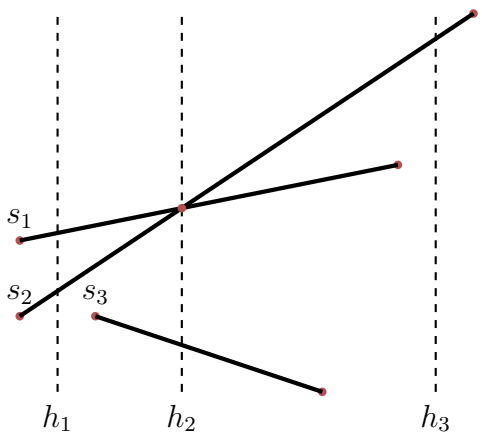
Sweepline Prinzip



Vereinfachende Annahmen

- Keine Strecke verläuft senkrecht
- Jeder Schnittpunkt wird von maximal zwei Strecken gebildet.

Anordnen von Strecken



Quasiordnung (Halbordnung ohne Antisymmetrie)

$$s_2 \preccurlyeq_{h_1} s_1$$
$$s_1 \preccurlyeq_{h_2} s_2$$
$$s_2 \preccurlyeq_{h_2} s_1$$
$$s_3 \preccurlyeq_{h_2} s_2$$

Bzgl. h_3 sind die Strecken unvergleichbar.

Sweep-Line bewegen

- *Sweep-Line Status* : Beziehung der durch Sweep-Line geschnittenen Objekte
- *Ereignisliste* : Folge von Ereignispunkten, nach x-Koordinate geordnet. Sweepline wandert von links nach rechts und hält an jedem Ereignispunkt.

Sweep-Line Status

Vorordnung T der geschnittenen Strecken Benötigte Operationen:

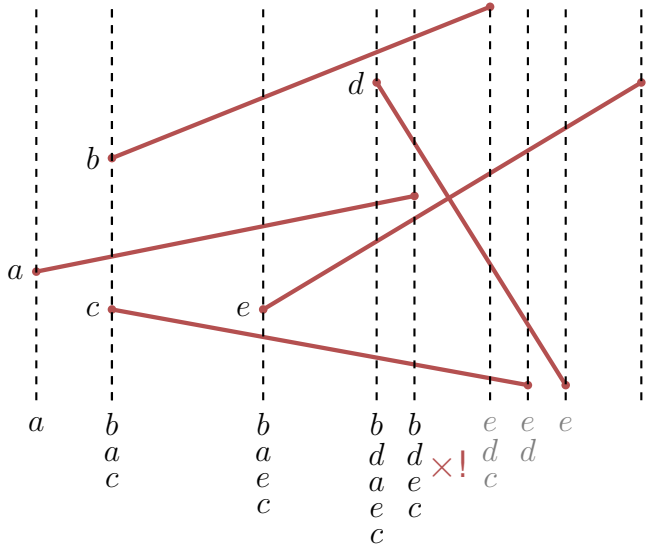
- *Insert*(T, s) Füge Strecke s in T ein
- *Delete*(T, s) Entferne s von T
- *Above*(T, s) Rückgabe Strecke unmittelbar oberhalb von s in T
- *Below*(T, s) Rückgabe Strecke unmittelbar unterhalb von s in T

Mögliche Implementation: Balancierter Baum (AVL-Baum, Rot-Schwarz Baum etc.)

Algorithmus Any-Segments-Intersect(S)

Input : Liste von Strecken S
Output : Rückgabe ob S schneidende Strecken enthält
$T \leftarrow \emptyset$
Sortiere Endpunkte der Strecken in S von links nach rechts (links vor rechts und unten vor oben)
for Sortierte Endpunkte p **do**
    if p linker Endpunkt einer Strecke s **then**
        Insert(T, s)
        if Above$(T, s) \cap s \neq \emptyset \ \vee \ $ Below$(T, s) \cap s \neq \emptyset$ **then** **return** true
    if p rechter Endpunkt einer Strecke s **then**
        if Above$(T, s) \cap$ Below$(T, s) \neq \emptyset$ **then** **return** true
        Delete(T, s)
return false;

Illustration



Analyse

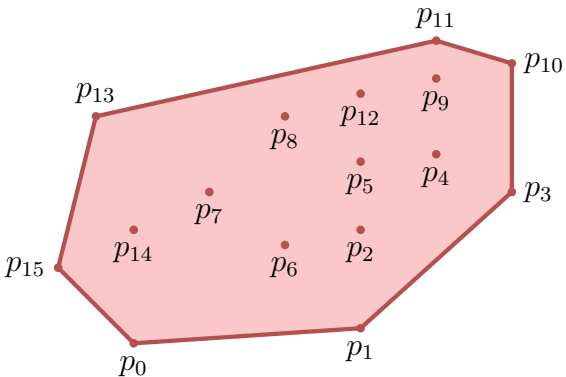
Laufzeit des Algorithmus Any-Segments-Intersect

- Sortieren $\mathcal{O}(n \log n)$
- n Iterationen der For-Schleife. Jede Operation auf dem balancierten Baum $\mathcal{O}(\log n)$

Insgesamt $\mathcal{O}(n \log n)$

Konvexe Hülle

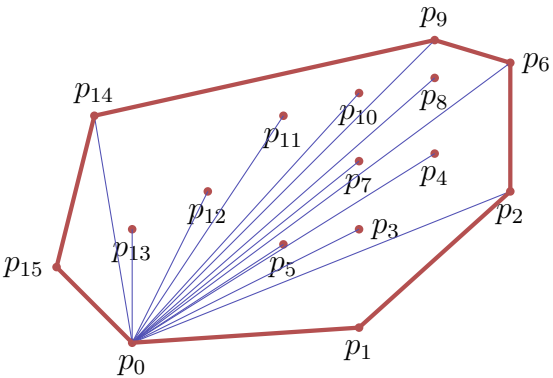
Konvexe Hülle $CH(Q)$ einer Menge Q von Punkten: kleinstes konvexes Polygon P, so dass jeder Punkt entweder auf dem Rand oder im Inneren liegt.



Algorithmus Graham-Scan

Input : Menge von Punkten Q
Output : Stack S von Punkten der konvexen Hülle von Q
p_0: Punkt mit minimaler y- (gegebenenfalls zusätzlich minimaler x-) Koordinate
$(p_1, \ldots, p_m)$ restlichen Punkte sortiert nach Polarwinkel gegen Uhrzeigersinn relativ zu p_0; Wenn Punkte mit gleichem Polarwinkel vorhanden, verwerfe alle ausser dem mit maximalen Abstand von p_0
$S \leftarrow \emptyset$
if $m < 2$ **then return** S
Push(S, p_0); Push(S, p_1); Push(S, p_2)
for $i \leftarrow 3$ **to** m **do**
    while Winkel (NextToTop(S), Top(S), p_i) nicht nach links gerichtet **do**
        Pop(S);
    Push(S, p_i)
return S

Illustration Graham-Scan



Stack:

p_{15}
p_{14}
p_9
p_6
p_2
p_1
p_0

Analyse

Laufzeit des Algorithmus Graham-Scan

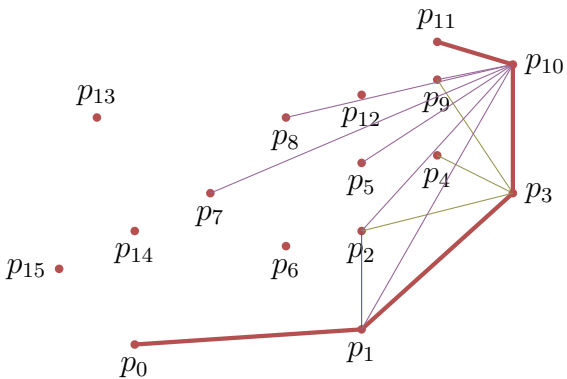
- Sortieren $\mathcal{O}(n \log n)$
- n Iterationen der For-Schleife
- Amortisierte Analyse des Multipop beim Stapel: amortisiert konstante Laufzeit des Multipop, ebenso hier: amortisiert konstante Laufzeit der While-Schleife.

Insgesamt $\mathcal{O}(n \log n)$

Jarvis Marsch / Gift Wrapping Algorithmus

1. Starte mit Extrempunkt (z.B. unterster Punkt) $p = p_0$
2. Suche Punkt q, so dass $\overline{pq}$ am weitesten rechts liegende Gerade, d.h. jeder andere Punkt liegt links von der Geraden $\overline{pq}$ (oder auf der Geraden näher bei p).
3. Fahre mit $p \leftarrow q$ bei (2) weiter, bis $p = p_0$.

Illustration Jarvis



Analyse Gift-Wrapping

- Sei h die Anzahl Eckpunkte der konvexen Hülle.
- Laufzeit des Algorithmus $\mathcal{O}(h \cdot n)$.

Dichtestes Punktepaar

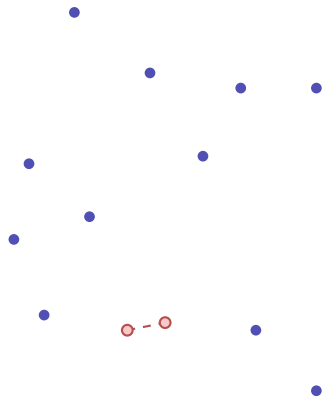
Euklidischer Abstand $d(s,t)$ zweier Punkte s und t:

$$d(s,t) = \|s-t\|_2 = \sqrt{(s_x-t_x)^2+(s_y-t_y)^2}$$

Problem: Suche Punkte p und q aus Q, für welche gilt

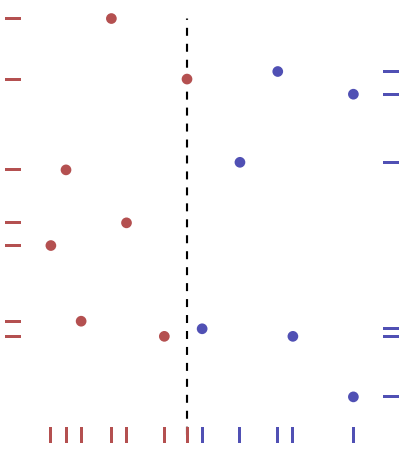
$$d(p,q) \leq d(s,t) \; \forall \; s,t \in Q, s \neq t.$$

Naiv: alle $\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$ Punktepaare.



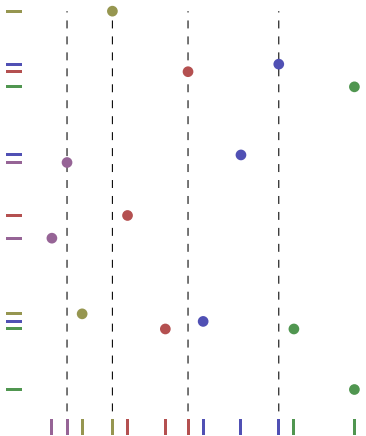
Divide And Conquer

- Punktmenge P, zu Beginn $P \leftarrow Q$
- Arrays X und Y, welche die Punkte aus P enthalten, sortiert nach x- bzw. nach y-Koordinate.
- Teile Punktmenge ein in zwei (annähernd) gleich grosse Mengen P_L und P_R, getrennt durch vertikale Gerade durch einen Punkt von P.
- Teile Arrays X und Y entsprechend in X_L, X_R. Y_L und Y_R.



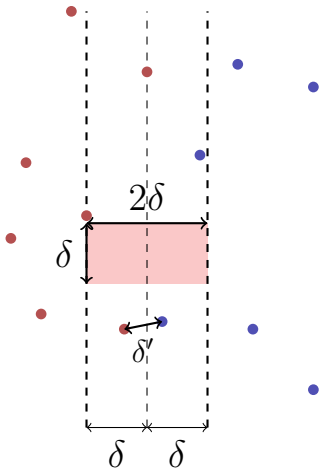
Divide And *Conquer*

- Rekursiver Aufruf jeweils mit P_L, X_L, Y_L und P_R, X_R, Y_R. Erhalte minimale Abstände δ_L, δ_R.
- (Wenn nur noch $k \leq 3$ Punkte: berechne direkt minimalen Abstand)
- Nach reukrsivem Aufruf $\delta = \min(\delta_L, \delta_R)$. Kombiniere (nächste Folie) und gib bestes Resultat zurück.



Kombinieren

- Erzeuge Array Y' mit y-sortierten Punkten aus Y, die innerhalb des 2δ Streifens um die Trennlinie befinden
- Betrachte für jeden Punkt $p \in Y'$ die sieben* (!) auf p folgenden Punkte. Berechne minimale Distanz δ'.
- Wenn $\delta' < \delta$, dann noch dichteres Paar in P als in P_L und P_R gefunden. Rückgabe der minimalen Distanz.



*Man kann zeigen, dass maximal acht Punkte aus P im gezeigten Rechteck liegen können. Hier ohne Beweis.

Implementation

- Ziel: Rekursionsgleichung (Laufzeit) $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + \mathcal{O}(n)$.
- Konsequenz: in den Schritten ist das Sortieren verboten!
- Nichttrivial: nur Arrays Y und Y'
- Idee: Merge umgekehrt: durchlaufe (nach y-Koordinate vorsortiertes) Y und hänge dem Auswahlkriterium der x-Koordinate folgend an Y_L und Y_R an. Genauso für Y'. Laufzeit $\mathcal{O}(|Y|)$.

Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(n \log n)$.