2. Effizienz von Algorithmen

Effizienz von Algorithmen, Random Access Machine Modell, Funktionenwachstum, Asymptotik [Cormen et al, Kap. 2.2,3,4.2-4.4 | Ottman/Widmayer, Kap. 1.1]

Effizienz von Algorithmen

Ziele

- Laufzeitverhalten eines Algorithmus maschinenunabhängig quantifizieren.
- Effizienz von Algorithmen vergleichen.
- Abhängigkeit von der Eingabegrösse verstehen.

Technologiemodell

Random Access Machine (RAM)

- Ausführungsmodell: Instruktionen werden der Reihe nach (auf einem Prozessorkern) ausgeführt.
- Speichermodell: Konstante Zugriffszeit.
- Elementare Operationen: Rechenoperation ($+$,$-$,$\cdot$,...) , Vergleichsoperationen, Zuweisung / Kopieroperation, Flusskontrolle (Sprünge)
- Einheitskostenmodell: elementare Operation hat Kosten 1.
- Datentypen: Fundamentaltypen wie grössenbeschränkte Ganzzahl oder Fliesskommazahl.

Grösse der Eingabedaten

Typisch: Anzahl Eingabeobjekte (von fundamentalem Typ).

Oftmals: Anzahl Bits für eine *vernünftige / kostengünstige* Repräsentation der Daten.

Asymptotisches Verhalten

Genaue Laufzeit lässt sich selbst für kleine Eingabedaten kaum voraussagen.

- Betrachten das asymptotische Verhalten eines Algorithmus.
- Ignorieren alle konstanten Faktoren.

Beispiel

Eine Operation mit Kosten 20 ist genauso gut wie eine mit Kosten 1. Lineares Wachstum mit Steigung 5 ist genauso gut wie lineares Wachstum mit Steigung 1.

2.1 Funktionenwachstum

$\mathcal{O}$, Θ, Ω [Cormen et al, Kap. 3; Ottman/Widmayer, Kap. 1.1]

Oberflächlich

Verwende die asymptotische Notation zur Kennzeichnung der Laufzeit von Algorithmen

Wir schreiben $\Theta(n^2)$ und meinen, dass der Algorithmus sich für grosse n wie n^2 verhält: verdoppelt sich die Problemgrösse, so vervierfacht sich die Laufzeit.

Genauer: Asymptotische obere Schranke

Gegeben: Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

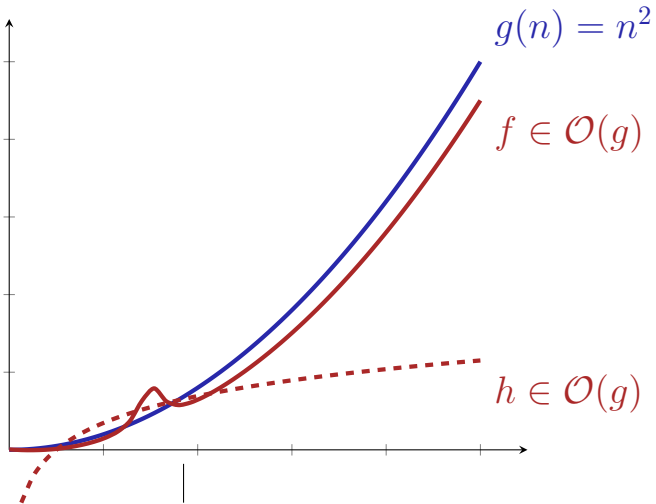
Definition:

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \\ \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \; \forall n \geq n_0\}$$

Schreibweise:

$$\mathcal{O}(g(n)) := \mathcal{O}(g(\cdot)) = \mathcal{O}(g).$$

Anschauung



Beispiele

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ \ \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0\}$$

$f(n)$	$f \in \mathcal{O}(?)$	Beispiel
$3n + 4$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 4, n_0 = 4$
$2n$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 2, n_0 = 0$
$n^2 + 100n$	$\mathcal{O}(n^2)$	$c = 2, n_0 = 100$
$n + \sqrt{n}$	$\mathcal{O}(n)$	$c = 2, n_0 = 1$

Eigenschaft

$$f_1 \in \mathcal{O}(g), f_2 \in \mathcal{O}(g) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(g)$$

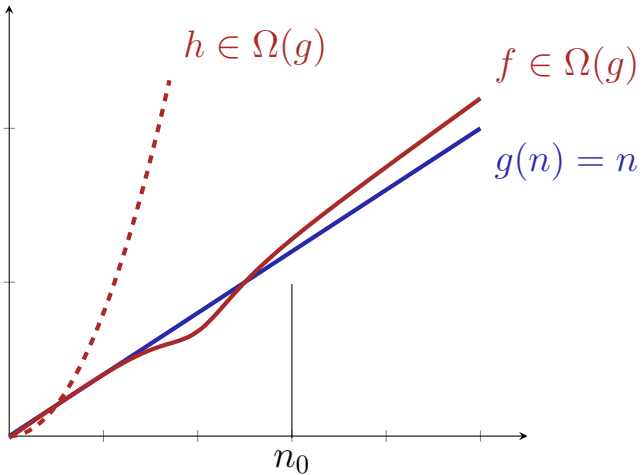
Umkehrung: Asymptotische untere Schranke

Gegeben: Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Definition:

$$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \\ \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \; \forall n \geq n_0\}$$

Beispiel



Asymptotisch scharfe Schranke

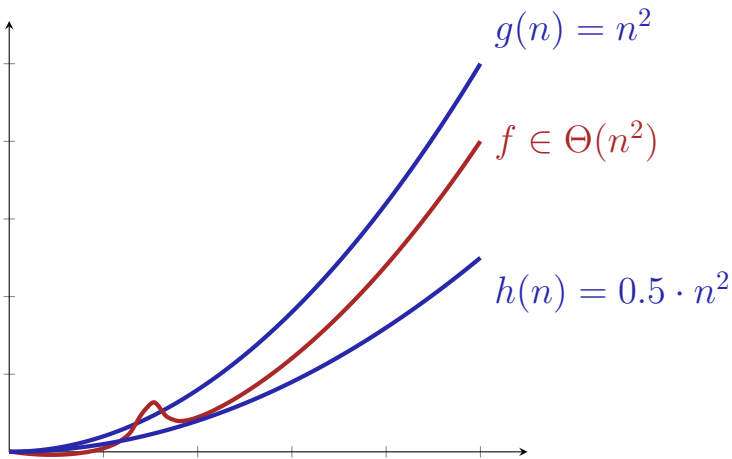
Gegeben Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Definition:

$$\Theta(g) := \Omega(g) \cap \mathcal{O}(g).$$

Einfache, geschlossene Form: Übung.

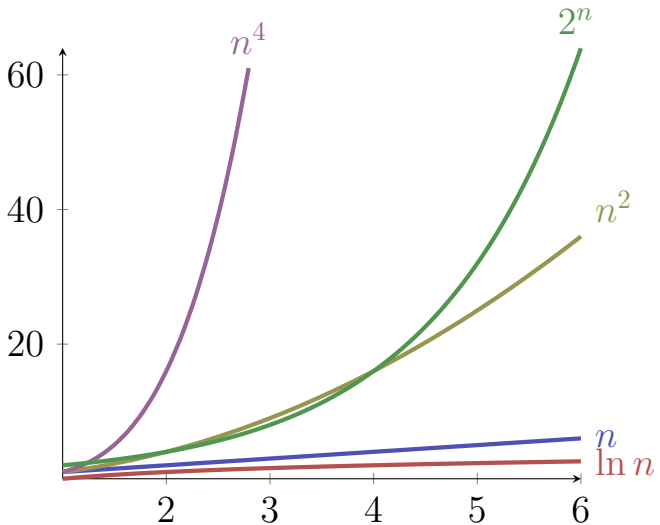
Beispiel



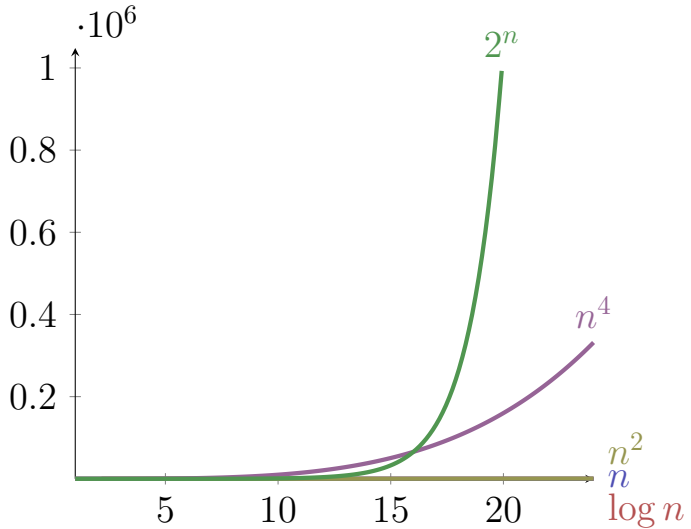
Wachstumsbezeichnungen

$\mathcal{O}(1)$	beschränkt	Array-Zugriff
$\mathcal{O}(\log \log n)$	doppelt logarithmisch	Binäre sortierte Suche interpoliert
$\mathcal{O}(\log n)$	logarithmisch	Binäre sortierte Suche
$\mathcal{O}(\sqrt{n})$	wie die Wurzelfunktion	Primzahltest (naiv)
$\mathcal{O}(n)$	linear	Unsortierte naive Suche
$\mathcal{O}(n \log n)$	superlinear / loglinear	Gute Sortieralgorithmen
$\mathcal{O}(n^2)$	quadratisch	Einfache Sortieralgorithmen
$\mathcal{O}(n^c)$	polynomial	Matrixmultiplikation
$\mathcal{O}(2^n)$	exponentiell	Travelling Salesman Dynamic Programming
$\mathcal{O}(n!)$	faktoriell	Travelling Salesman naiv

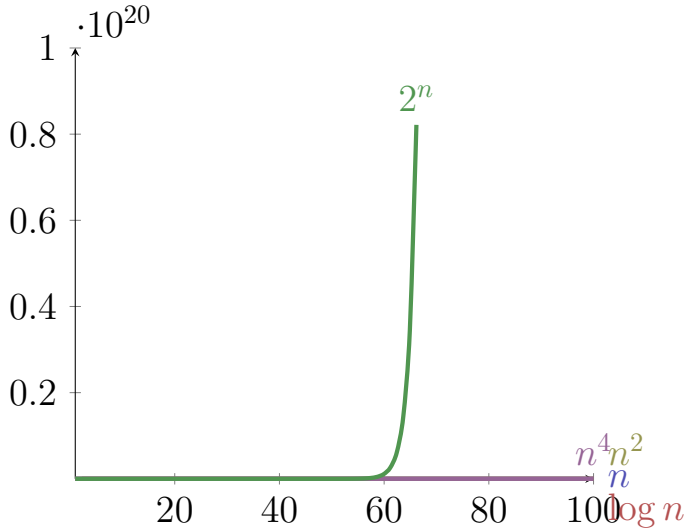
Kleine n



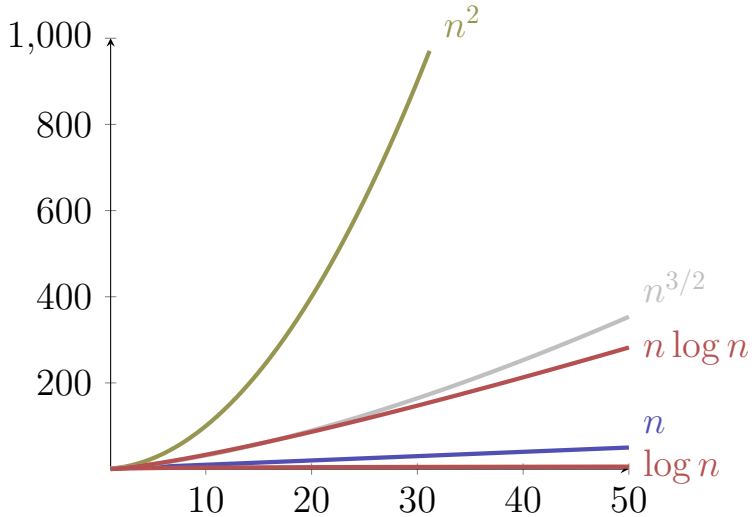
Grössere n



“Grosse” n



Logarithmen!



Zeitbedarf

Annahme: 1 Operation = $1\mu s$.

Problemgrösse	1	100	10000	10^6	10^9
$\log_2 n$	$1\mu s$	$7\mu s$	$13\mu s$	$20\mu s$	$30\mu s$
n	$1\mu s$	$100\mu s$	$1/100s$	$1s$	17 Minuten
$n \log_2 n$	$1\mu s$	$700\mu s$	$13/100\mu s$	$20s$	8.5 Stunden
n^2	$1\mu s$	$1/100s$	1.7 Minuten	11.5 Tage	317 Jahrhund.
2^n	$1\mu s$	10^{14} Jahrh.	$\approx \infty$	$\approx \infty$	$\approx \infty$

Eine gute Strategie?

... dann kaufe ich mir eben eine neue Maschine! Wenn ich heute ein Problem der Grösse n lösen kann, dann kann ich mit einer 10 oder 100 mal so schnellen Maschine...

Komplexität	(speed $\times 10$)	(speed $\times 100$)
$\log_2 n$	$n \to n^{10}$	$n \to n^{100}$
n	$n \to 10 \cdot n$	$n \to 100 \cdot n$
n^2	$n \to 3.16 \cdot n$	$n \to 10 \cdot n$
2^n	$n \to n + 3.32$	$n \to n + 6.64$

Beispiele

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ korrekt, aber ungenau:
  $n \in \mathcal{O}(n)$ und sogar $n \in \Theta(n)$.
- $3n^2 \in \mathcal{O}(2n^2)$ korrekt, aber unüblich:
  Konstanten weglasssen: $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $2n^2 \in \mathcal{O}(n)$ ist falsch: $\frac{2n^2}{cn} = \frac{2}{c}n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$!
- $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ ist korrekt
- $\Theta(n) \subseteq \Theta(n^2)$ ist falsch: $n \notin \Omega(n^2) \supset \Theta(n^2)$

Nützliches

Theorem

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ zwei Funktionen. Dann gilt:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g), \mathcal{O}(f) \subsetneq \mathcal{O}(g)$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C > 0$ *(C konstant)* $\Rightarrow f \in \Theta(g)$.
3. $\frac{f(n)}{g(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \infty \Rightarrow g \in \mathcal{O}(f), \mathcal{O}(g) \subsetneq \mathcal{O}(f)$.

Zur Notation

Übliche Schreibweise

$$f = \mathcal{O}(g)$$

ist zu verstehen als $f \in \mathcal{O}(g)$.

Es gilt nämlich

$$f_1 = \mathcal{O}(g), f_2 = \mathcal{O}(g) \not\Rightarrow f_1 = f_2!$$

Beispiel

$n = \mathcal{O}(n^2), n^2 = \mathcal{O}(n^2)$ aber natürlich $n \neq n^2$.

Algorithmen, Programme und Laufzeit

Programm: Konkrete Implementation eines Algorithmus.

Laufzeit des Programmes: messbarer Wert auf einer konkreten Maschine. Kann sowohl nach oben, wie auch nach unten abgeschätzt werden.

Beispiel

Rechner mit 3 GHz. Maximale Anzahl Operationen pro Taktzyklus (z.B. 8). $\Rightarrow$ untere Schranke.
Einzelne Operation dauert mit Sicherheit nie länger als ein Tag $\Rightarrow$ obere Schranke.

Asymptotisch gesehen stimmen die Schranken überein.

Komplexität

Komplexität eines Problems P: minimale (asymptotische) Kosten über alle Algorithmen A, die P lösen.

Komplexität der Elementarmultiplikation zweier Zahlen der Länge n ist $\Omega(n)$ und $\mathcal{O}(n^{\log_3 2})$ (Karatsuba Ofman).

Exemplarisch:

Problem	Komplexität	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$
		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
Algorithmus	Kosten[2]	$3n-4$	$\mathcal{O}(n)$	$\Theta(n^2)$
		$\downarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Programm	Laufzeit	$\Theta(n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\Theta(n^2)$

[2] Anzahl Elementaroperationen

3. Algorithmenentwurf

Maximum Subarray Problem [Ottman/Widmayer, Kap. 1.3]
Divide and Conquer [Ottman/Widmayer, Kap. 1.2.2. S.9; Cormen et al, Kap. 4-4.1]

Algorithmenentwurf

Induktive Entwicklung eines Algorithmus: Zerlegung in Teilprobleme, Verwendung der Lösungen der Teilproblem zum Finden der endgültigen Lösung.

Ziel: Entwicklung des asymptotisch effizientesten (korrekten) Algorithmus.

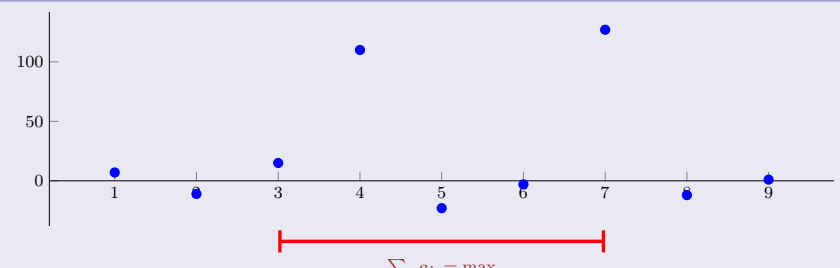
Effizienz hinsichtlich der Laufzeitkosten (# Elementaroperationen) oder / und Speicherbedarf.

Maximum Subarray Problem

Gegeben: ein Array von n rationalen Zahlen $(a_1, \ldots, a_n)$.

Gesucht: Teilstück $[i, j]$, $1 \leq i \leq j \leq n$ mit maximaler positiver Summe $\sum_{k=i}^{j} a_k$.

Beispiel: $a = (7, -11, 15, 110, -23, -3, 127, -12, 1)$



Naiver Maximum Subarray Algorithmus

Input : Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Output : I, J mit $\sum_{k=I}^{J} a_k$ maximal.

$M \leftarrow 0$; $I \leftarrow 1$; $J \leftarrow 0$
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
    for $j \in \{i, \ldots, n\}$ **do**
        $m = \sum_{k=i}^{j} a_k$
        if $m > M$ **then**
            $M \leftarrow m$; $I \leftarrow i$; $J \leftarrow j$
return I, J

Analyse

Theorem

Der naive Algorithmus für das Maximum Subarray Problem führt $\Theta(n^3)$ Additionen durch.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(j-i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i} j == \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n-i+1)}{2}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{i\cdot(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Theta(n^3) + \Theta(n^2)\right) = \Theta(n^3).$$

■

Beobachtung

$$\sum_{k=i}^{j} a_k = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{j} a_k\right)}_{S_j} - \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{i-1} a_k\right)}_{S_{i-1}}$$

Präfixsummen

$$S_i := \sum_{k=1}^{i} a_k.$$

Maximum Subarray Algorithmus mit Präfixsummen

Input : Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Output : I, J mit $\sum_{k=J}^{J} a_k$ maximal.

$\mathcal{S}_0 \leftarrow 0$
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do** // Präfixsumme
  $\mathcal{S}_i \leftarrow \mathcal{S}_{i-1} + a_i$
$M \leftarrow 0$; $I \leftarrow 1$; $J \leftarrow 0$
for $i \in \{1, \ldots, n\}$ **do**
  for $j \in \{i, \ldots, n\}$ **do**
    $m = \mathcal{S}_j - \mathcal{S}_{i-1}$
    if $m > M$ **then**
      $M \leftarrow m$; $I \leftarrow i$; $J \leftarrow j$

Analyse

Theorem

Der Präfixsummen Algorithmus für das Maximum Subarray Problem führt $\Theta(n^2)$ Additionen und Subtraktionen durch.

Beweis:

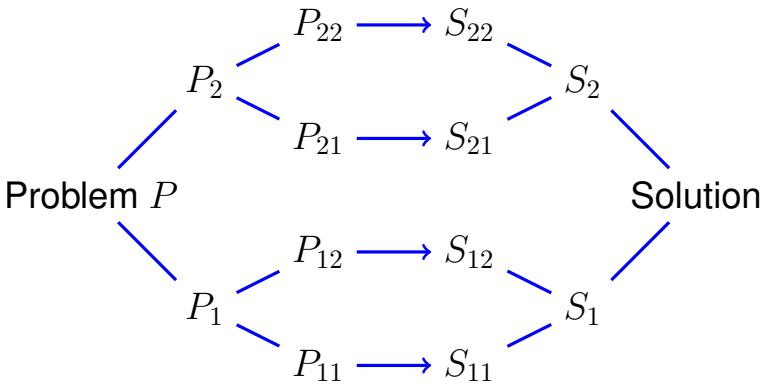
$$\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 1 = n + \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) = n + \sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$$

■

divide et impera

Teile und (be)herrsche (engl. divide and conquer)

Zerlege das Problem in Teilprobleme, deren Lösung zur vereinfachten Lösung des Gesamtproblems beitragen.



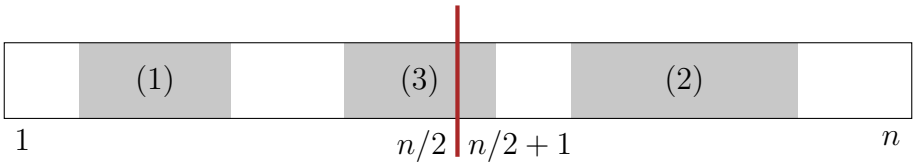
Maximum Subarray – Divide

- Divide: Teile das Problem in zwei (annähernd) gleiche Hälften auf:
  $(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_{\lfloor n/2 \rfloor}, \quad a_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, \ldots, a_1)$
- Vereinfachende Annahme: $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Maximum Subarray – Conquer

Sind i, j die Indizes einer Lösung $\Rightarrow$ Fallunterscheidung:

1. Lösung in linker Hälfte $1 \leq i \leq j \leq n/2 \Rightarrow$ Rekursion (linke Hälfte)
2. Lösung in rechter Hälfte $n/2 < i \leq j \leq n \Rightarrow$ Rekursion (rechte Hälfte)
3. Lösung in der Mitte $1 \leq i \leq n/2 < j \leq n \Rightarrow$ Nachfolgende Beobachtung



Maximum Subarray – Beobachtung

Annahme: Lösung in der Mitte $1 \leq i \leq n/2 < j \leq n$

$$
\begin{aligned}
S_{\max} &= \max_{\substack{1 \leq i \leq n/2 \\ n/2 < j \leq n}} \sum_{k=i}^{j} a_k = \max_{\substack{1 \leq i \leq n/2 \\ n/2 < j \leq n}} \left(\sum_{k=i}^{n/2} a_k + \sum_{k=n/2+1}^{j} a_k \right) \\
&= \max_{1 \leq i \leq n/2} \sum_{k=i}^{n/2} a_k + \max_{n/2 < j \leq n} \sum_{k=n/2+1}^{j} a_k \\
&= \max_{1 \leq i \leq n/2} \underbrace{S_{n/2} - S_{i-1}}_{\text{Suffixsumme}} + \max_{n/2 < j \leq n} \underbrace{S_j - S_{n/2}}_{\text{Präfixsumme}}
\end{aligned}
$$

Maximum Subarray Divide and Conquer Algorithmus

Input : Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Output : Maximales $\sum_{k=i'}^{j'} a_k$.
if $n = 1$ **then**
    return $\max\{a_1, 0\}$
else
    Unterteile $a = (a_1, \ldots, a_n)$ in $A_1 = (a_1, \ldots, a_{n/2})$ und $A_2 = (a_{n/2+1}, \ldots, a_n)$
    Berechne rekursiv beste Lösung W_1 in A_1
    Berechne rekursiv beste Lösung W_2 in A_2
    Berechne grösste Suffixsumme S in A_1
    Berechne grösste Präfixsumme P in A_2
    Setze $W_3 \leftarrow S + P$
    return $\max\{W_1, W_2, W_3\}$

Analyse

Theorem

Der Divide and Conquer Algorithmus für das Maximum Subarray Sum Problem führt $\Theta(n \log n)$ viele Additionen und Vergleiche durch.

Analyse

Input : Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Output : Maximales $\sum_{k=i'}^{j'} a_k$.
if $n = 1$ **then**
$\Theta(1)$ **return** $\max\{a_1, 0\}$
else
$\Theta(1)$ Unterteile $a = (a_1, \ldots, a_n)$ in $A_1 = (a_1, \ldots, a_{n/2})$ und $A_2 = (a_{n/2+1}, \ldots, a_n)$
$T(n/2)$ Berechne rekursiv beste Lösung W_1 in A_1
$T(n/2)$ Berechne rekursiv beste Lösung W_2 in A_2
$\Theta(n)$ Berechne grösste Suffixsumme S in A_1
$\Theta(n)$ Berechne grösste Präfixsumme P in A_2
$\Theta(1)$ Setze $W_3 \leftarrow S + P$
$\Theta(1)$ **return** $\max\{W_1, W_2, W_3\}$

Analyse

Rekursionsgleichung

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{falls } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + a \cdot n & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

Analyse

Mit $n = 2^k$:

$$\overline{T}(k) = \begin{cases} c & \text{falls } k = 0 \\ 2\overline{T}(k-1) + a \cdot 2^k & \text{falls } k > 0 \end{cases}$$

Lösung:

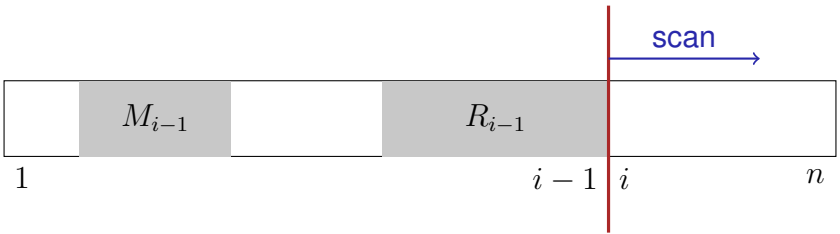
$$\overline{T}(k) = 2^k \cdot c + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \cdot a \cdot 2^{k-i} = c \cdot 2^k + a \cdot k \cdot 2^k = \Theta(k \cdot 2^k)$$

also

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

Maximum Subarray Sum Problem – Induktiv

Annahme: Maximaler Wert M_{i-1} der Subarraysumme für $(a_1, \ldots, a_{i-1})$ $(1 < i \leq n)$ bekannt.



a_i: erzeugt höchstens Intervall am Rand (Präfixsumme).

$R_{i-1} \Rightarrow R_i = \max\{R_{i-1} + a_i, 0\}$

Induktiver Maximum Subarray Algorithmus

Input : Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Output : $\max\{0, \max_{i,j} \sum_{k=i}^{j} a_k\}$.

$M \leftarrow 0$
$R \leftarrow 0$
for $i = 1 \ldots n$ **do**
    $R \leftarrow R + a_i$
    if $R < 0$ **then**
        $R \leftarrow 0$
    if $R > M$ **then**
        $M \leftarrow R$
return M;

Analyse

Theorem

Der induktive Algorithmus für das Maximum Subarray Sum Problem führt $\Theta(n)$ viele Additionen und Vergleiche durch.

Komplexität des Problems?

Geht es besser als $\Theta(n)$?

Jeder korrekte Algorithmus für das Maximum Subarray Sum Problem muss jedes Element im Algorithmus betrachten.

Annahme: der Algorithmus betrachtet nicht a_i.

1. Lösung des Algorithmus enthält a_i. Wiederholen den Algorithmus mit genügend kleinem a_i, so dass die Lösung den Punkt nicht enthalten hätte dürfen.
2. Lösung des Algorithmus enthält a_i nicht. Wiederholen den Algorithmus mit genügend grossem a_i, so dass die Lösung a_i hätten enthalten müssen.

Komplexität des Maximum Subarray Sum Problems

Theorem

Das Maximum Subarray Sum Problem hat Komplexität $\Theta(n)$.

Beweis: Induktiver Algorithmus mit asymptotischer Laufzeit $\mathcal{O}(n)$.
Jeder Algorithmus hat Laufzeit $\Omega(n)$.
Somit ist die Komplexität $\Omega(n) \cap \mathcal{O}(n) = \Theta(n)$. ■