

24. Minimale Spann­b­ume

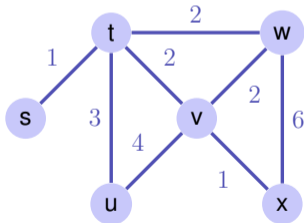
Motivation, Greedy, Algorithmus von Kruskal, Allgemeine Regeln, Union-Find Struktur, Algorithmus von Jarnik, Prim, Dijkstra, Fibonacci Heaps

[Ottman/Widmayer, Kap. 9.6, 6.2, 6.1, Cormen et al, Kap. 23, 19]

Problem

Gegeben: Ungerichteter, zusammenhängender, gewichteter Graph $G = (V, E, c)$.

Gesucht: Minimaler Spannbaum $T = (V, E')$, $E' \subset E$, so dass $\sum_{e \in E'} c(e)$ minimal.



Anwendung: Billigstes / kürzestes Kabelnetzwerk

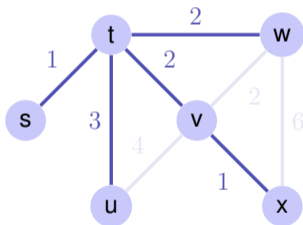
Greedy Verfahren

Zur Erinnerung:

- Gierige Verfahren berechnen die Lösung schrittweise, indem lokal die beste Lösung gewählt wird.
- Die meisten Probleme sind nicht mit einer greedy Strategie lösbar.
- Das Problem der minimalen Spannäume bildet in diesem Sinne eine der Ausnahmen.

Greedy Idee

Konstruiere T indem immer die billigste Kante hinzugefügt wird, welche keinen Zyklus erzeugt.



(Lösung ist nicht eindeutig.)

Algorithmus MST-Kruskal(G)

Input : Gewichteter Graph $G = (V, E, c)$

Output : Minimaler Spannbaum mit Kanten A .

Sortiere Kanten nach Gewicht $c(e_1) \leq \dots \leq c(e_m)$

$A \leftarrow \emptyset$

for $k = 1$ **to** $|E|$ **do**

if $(V, A \cup \{e_k\})$ kreisfrei **then**
 $A \leftarrow A \cup \{e_k\}$

return (V, A, c)

Korrektheit

Zu jedem Zeitpunkt ist (V, A) ein Wald, eine Menge von Bäumen.
MST-Kruskal betrachtet jede Kante e_k einmal und wählt e_k oder verwirft e_k

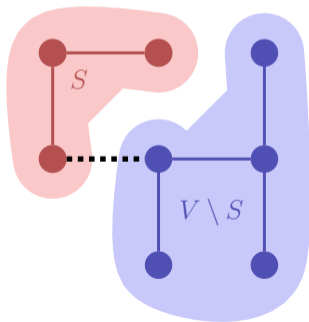
Notation (Momentaufnahme im Algorithmus)

- A : Menge gewählte Kanten
- R : Menge verworfener Kanten
- U : Menge der noch unentschiedenen Kanten

Schnitt

Ein Schnitt von G ist eine Partition $S, V \setminus S$ von V . ($S \subseteq V$).

Eine Kante kreuzt einen Schnitt, wenn einer Ihrer Endpunkte in S und der andere in $V \setminus S$ liegt.



Regeln

- 1 Auswahlregel: Wähle einen Schnitt, den keine gewählte Kante kreuzt. Unter allen unentschiedenen Kanten, welche den Schnitt kreuzen, wähle die mit minimalem Gewicht.
- 2 Verwerfregel: Wähle einen Kreis ohne verworfene Kanten. Unter allen unentschiedenen Kanten im Kreis verwerfe die mit maximalem Gewicht.

Regeln

Kruskal wendet beide Regeln an:

- 1 Ein gewähltes e_k verbindet zwei Zusammenhangskomponenten, sonst würde ein Kreis erzeugt werden. e_k ist beim Verbinden minimal, man kann also einen Schnitt wählen, den e_k mit minimalem Gewicht kreuzt.
- 2 Ein verworfenes e_k ist Teil eines Kreises. Innerhalb des Kreises hat e_k maximales Gewicht.

Theorem

Jeder Algorithmus, welcher schrittweise obige Regeln anwendet bis $U = \emptyset$ ist korrekt.

Folgerung: MST-Kruskal ist korrekt.

Auswahlinvariante

Invariante: Es gibt stets einen minimalen Spannbaum, der alle gewählten und keine der verworfenen Kanten enthält.

Wenn die beiden Regeln die Invariante erhalten, dann ist der Algorithmus sicher korrekt. Induktion:

- Zu Beginn: $U = E, R = A = \emptyset$. Invariante gilt offensichtlich.
- Invariante bleibt erhalten.
- Am Ende: $U = \emptyset, R \cup A = E \Rightarrow (V, A)$ ist Spannbaum.

Beweis des Theorems: zeigen nun, dass die beiden Regeln die Invariante erhalten.

Auswahlregel erhält Invariante

Es gibt stets einen minimalen Spannbaum T , der alle gewählten und keine der verworfenen Kanten enthält.

Wähle einen Schnitt, den keine gewählte Kante kreuzt. Unter allen unentschiedenen Kanten, welche den Schnitt kreuzen, wähle eine Kante e mit minimalem Gewicht.

- Fall 1: $e \in T$ (fertig)
- Fall 2: $e \notin T$. Dann hat $T \cup \{e\}$ einen Kreis, der e enthält. Kreis muss eine zweite Kante e' enthalten, welche den Schnitt auch kreuzt.³⁴ Da $e' \notin R$ ist $e' \in U$. Somit $c(e) \leq c(e')$ und $T' = T \setminus \{e'\} \cup \{e\}$ ist auch minimaler Spannbaum (und $c(e) = c(e')$).

³⁴Ein solcher Kreis enthält mindestens einen Knoten in S und einen in $V \setminus S$ und damit mindestens zwei Kanten zwischen S und $V \setminus S$.

Verwerfregel erhält Invariante

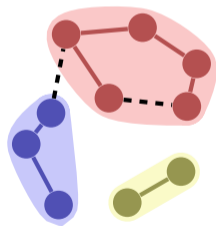
Es gibt stets einen minimalen Spannbaum T , der alle gewählten und keine der verworfenen Kanten enthält.

Wähle einen Kreis ohne verworfene Kanten. Unter allen unentschiedenen Kanten im Kreis verwerfe die Kante e mit maximalem Gewicht.

- Fall 1: $e \notin T$ (fertig)
- Fall 2: $e \in T$. Entferne e von T , Das ergibt einen Schnitt. Diesen Schnitt muss eine weitere Kante e' aus dem Kreis kreuzen. Da $c(e') \leq c(e)$ ist $T' = T \setminus \{e\} \cup \{e'\}$ auch minimal (und $c(e) = c(e')$).

Zur Implementation

Gegeben eine Menge von Mengen $i \equiv A_i \subset V$. Zur Identifikation von Schnitten und Kreisen: Zugehörigkeit der beiden Endpunkte einer Kante zu einer der Mengen.



Zur Implementation

Allgemeines Problem: Partition (Menge von Teilmengen) z.B.
 $\{\{1, 2, 3, 9\}, \{7, 6, 4\}, \{5, 8\}, \{10\}\}$

Benötigt: ADT (Union-Find-Struktur) mit folgenden Operationen

- $\text{Make-Set}(i)$: Hinzufügen einer neuen Menge i .
- $\text{Find}(e)$: Name i der Menge, welche e enthält.
- $\text{Union}(i, j)$: Vereinigung der Mengen i und j .

Union-Find Algorithmus MST-Kruskal(G)

Input : Gewichteter Graph $G = (V, E, c)$

Output : Minimaler Spannbaum mit Kanten A .

Sortiere Kanten nach Gewicht $c(e_1) \leq \dots \leq c(e_m)$

$A \leftarrow \emptyset$

for $k = 1$ **to** $|V|$ **do**

\lfloor MakeSet(k)

for $k = 1$ **to** $|E|$ **do**

$(u, v) \leftarrow e_k$

if Find(u) \neq Find(v) **then**

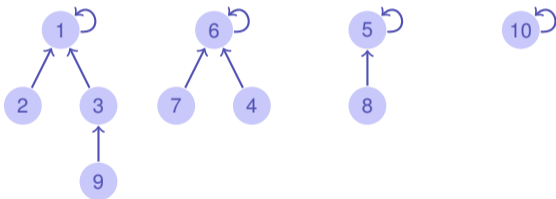
\lfloor Union(Find(u), Find(v))

\lfloor $A \leftarrow A \cup e_k$

return (V, A, c)

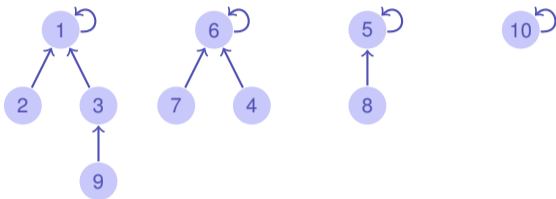
Implementation Union-Find

Idee: Baum für jede Teilmenge in der Partition, z.B.
 $\{\{1, 2, 3, 9\}, \{7, 6, 4\}, \{5, 8\}, \{10\}\}$



Baumwurzeln = Namen der Mengen,
Bäume = Elemente der Mengen

Implementation Union-Find



Repräsentation als Array:

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parent	1	1	1	6	5	6	5	5	3	10

Implementation Union-Find

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parent	1	1	1	6	5	6	5	5	3	10

Operationen:

- **Make-Set**(i): $p[i] \leftarrow i$; **return** i
- **Find**(i): **while** ($p[i] \neq i$) **do** $i \leftarrow p[i]$
; **return** i
- **Union**(i, j): $p[j] \leftarrow i$; **return** i

Optimierung der Laufzeit für Find

Baum kann entarten: Beispiel Union(1, 2), Union(2, 3), Union(3, 4), ...

Idee: Immer kleineren Baum unter grösseren Baum hängen.

Zusätzlich: Grösseninformation g

Operationen:

- **Make-Set(i):** $p[i] \leftarrow i; g[i] \leftarrow 1; \text{return } i$
- **Union(i, j):** **if** $g[j] > g[i]$ **then** $\text{swap}(i, j)$
 $p[j] \leftarrow i$
 $g[i] \leftarrow g[i] + g[j]$
 return i

Beobachtung

Theorem

Obiges Verfahren Vereinigung nach Grösse konserviert die folgende Eigenschaft der Bäume: ein Baum mit Höhe h hat mindestens 2^h Knoten.

Unmittelbare Folgerung: Laufzeit Find = $\mathcal{O}(\log n)$.

Beweis

Induktion: nach Voraussetzung haben Teilbäume jeweils mindestens 2^{h_i} Knoten. ObdA:
 $h_2 \leq h_1$.

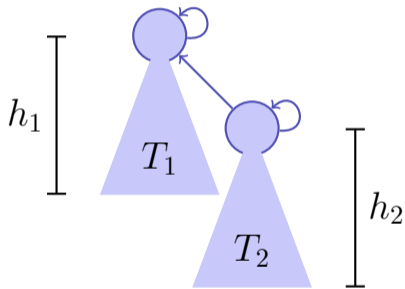
■ $h_2 < h_1$:

$$h(T_1 \oplus T_2) = h_1 \Rightarrow g(T_1 \oplus T_2) \geq 2^{h_1}$$

■ $h_2 = h_1$:

$$g(T_1) \geq g(T_2) \geq 2^{h_2}$$

$$\Rightarrow g(T_1 \oplus T_2) = g(T_1) + g(T_2) \geq 2 \cdot 2^{h_2} = 2^{h(T_1 \oplus T_2)}$$



Weitere Verbesserung

Bei jedem Find alle Knoten direkt an den Wurzelknoten hängen.

Find(i):

$j \leftarrow i$

while ($p[i] \neq i$) **do** $i \leftarrow p[i]$

while ($j \neq i$) **do**

$t \leftarrow j$
 $j \leftarrow p[j]$
 $p[t] \leftarrow i$

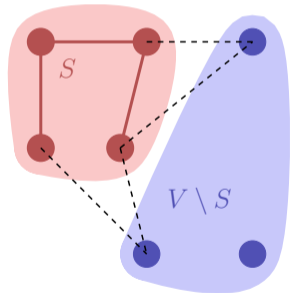
return i

Amortisierte Laufzeit: amortisiert *fast* konstant (Inverse der Ackermannfunktion).

MST Algorithmus von Jarnik, Prim, Dijkstra

Idee: Starte mit einem $v \in V$ und lasse von dort unter Verwendung der Auswahlregel einen Spannbaum wachsen:

```
 $S \leftarrow \{v_0\}$   
for  $i \leftarrow 1$  to  $|V|$  do  
  Wähle billigste  $(u, v)$  mit  $u \in S, v \notin S$   
   $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$   
   $S \leftarrow S \cup \{v\}$ 
```



Laufzeit

Trivial $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

Verbesserungen (wie bei Dijkstra's ShortestPath):

- Billigste Kante nach S merken: für jedes $v \in V \setminus S$. Jeweils $\deg^+(v)$ viele Updates für jedes neue $v \in S$. Kosten: $|V|$ viele Minima + Updates: $\mathcal{O}(|V|^2 + \sum_{v \in V} \deg^+(v)) = \mathcal{O}(|V|^2 + |E|)$
- Mit Minheap, Kosten: $|V|$ viele Minima = $\mathcal{O}(|V| \log |V|)$, $|E|$ Updates: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$, Initialisierung $\mathcal{O}(|V|)$: $\mathcal{O}(|E| \cdot \log |V|)$.
- Mit Fibonacci-Heap: $\mathcal{O}(|E| + |V| \cdot \log |V|)$.

Fibonacci Heaps

Datenstruktur zur Verwaltung von Elementen mit Schlüsseln.
Operationen

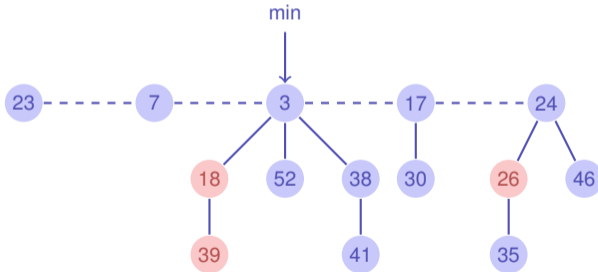
- **MakeHeap()**: Liefere neuen Heap ohne Elemente
- **Insert(H, x)**: Füge x zu H hinzu
- **Minimum(H)**: Liefere Zeiger auf das Element m mit minimalem Schlüssel
- **ExtractMin(H)**: Liefere und entferne (von H) Zeiger auf das Element m
- **Union(H_1, H_2)**: Liefere Verschmelzung zweier Heaps H_1 und H_2
- **DecreaseKey(H, x, k)**: Verkleinere Schlüssel von x in H zu k
- **Delete (H, x)**: Entferne Element x von H

Vorteil gegenüber Binary Heap?

	Binary Heap (worst-Case)	Fibonacci Heap (amortisiert)
MakeHeap	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Insert	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$
Minimum	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
ExtractMin	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$
Union	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$
Delete	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

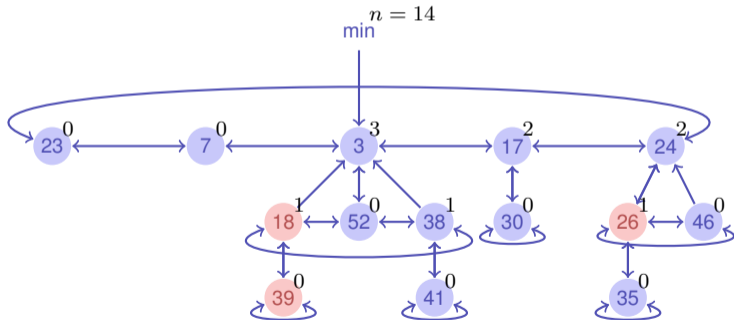
Struktur

Menge von Bäumen, welche der Min-Heap Eigenschaft genügen.
Markierbare Knoten.



Implementation

Doppelt verkettete Listen von Knoten mit marked-Flag und Anzahl Kinder. Zeiger auf das minimale Element und Anzahl Knoten.



Einfache Operationen

- MakeHeap (trivial)
- Minimum (trivial)
- Insert(H, e)
 - 1 Füge neues Element in die Wurzelliste ein
 - 2 Wenn Schlüssel kleiner als Minimum, min-pointer neu setzen.
- Union (H_1, H_2)
 - 1 Wurzellisten von H_1 und H_2 aneinander hängen
 - 2 Min-Pointer neu setzen.
- Delete(H, e)
 - 1 DecreaseKey($H, e, -\infty$)
 - 2 ExtractMin(H)

ExtractMin

- 1 Entferne Minimalknoten m aus der Wurzelliste
- 2 Hänge Liste der Kinder von m in die Wurzelliste
- 3 Verschmelze solange heapgeordnete Bäume gleichen Ranges, bis alle Bäume unterschiedlichen Rang haben:
Rangarray $a[0, \dots, n]$ von Elementen, zu Beginn leer. Für jedes Element e der Wurzelliste:
 - a Sei g der Grad von e .
 - b Wenn $a[g] = nil$: $a[g] \leftarrow e$.
 - c Wenn $e' := a[g] \neq nil$: Verschmelze e mit e' zu neuem e'' und setze $a[g] \leftarrow nil$. Setze e'' unmarkiert Iteriere erneut mit $e \leftarrow e''$ vom Grad $g + 1$.

DecreaseKey (H, e, k)

- 1 Entferne e von seinem Vaterknoten p (falls vorhanden) und erniedrige den Rang von p um eins.
- 2 Insert(H, e)
- 3 Vermeide zu dünne Bäume:
 - a Wenn $p = nil$, dann fertig
 - b Wenn p unmarkiert: markiere p , fertig.
 - c Wenn p markiert: unmarkiere p , trenne p von seinem Vater pp ab und Insert(H, p). Iteriere mit $p \leftarrow pp$.

Abschätzung für den Rang

Theorem

Sei p Knoten eines F -Heaps H . Ordnet man die Söhne von p in der zeitlichen Reihenfolge, in der sie an p durch Zusammenfügen angehängt wurden, so gilt: der i -te Sohn hat mindestens Rang $i - 2$

Beweis: p kann schon mehr Söhne gehabt haben und durch Abtrennung verloren haben. Als der i te Sohn p_i angehängt wurde, müssen p und p_i jeweils mindestens Rang $i - 1$ gehabt haben. p_i kann maximal einen Sohn verloren haben (wegen Markierung), damit bleibt mindestens Rang $i - 2$.

Abschätzung für den Rang

Theorem

Jeder Knoten p vom Rang k eines F-Heaps ist Wurzel eines Teilbaumes mit mindestens F_{k+1} Knoten. (F : Fibonacci-Folge)

Beweis: Sei S_k Minimalzahl Nachfolger eines Knotens vom Rang k in einem F-Heap plus 1 (der Knoten selbst). Klar: $S_0 = 1, S_1 = 2$. Nach vorigem Theorem $S_k \geq 2 + \sum_{i=0}^{k-2} S_i, k \geq 2$ (p und Knoten p_1 jeweils 1). Für Fibonacci-Zahlen gilt (Induktion) $F_k \geq 2 + \sum_{i=2}^k F_i, k \geq 2$ und somit (auch Induktion) $S_k \geq F_{k+2}$.

Fibonacci-Zahlen wachsen exponentiell ($\mathcal{O}(\varphi^k)$) Folgerung: Maximaler Grad eines beliebigen Knotens im Fibonacci-Heap mit n Knoten ist $\mathcal{O}(\log n)$.

Amortisierte Worst-case-Analyse Fibonacci Heap

$t(H)$: Anzahl Bäume in der Wurzelliste von H , $m(H)$: Anzahl markierte Knoten in H ausserhalb der Wurzelliste, Potentialfunktion $\Phi(H) = t(H) + 2 \cdot m(H)$. Zu Anfang $\Phi(H) = 0$. Potential immer nichtnegativ.

Amortisierte Kosten:

- **Insert(H, x)**: $t'(H) = t(H) + 1$, $m'(H) = m(H)$,
Potentialerhöhung 1, Amortisierte Kosten $\Theta(1) + 1 = \Theta(1)$
- **Minimum(H)**: Amortisierte Kosten = tatsächliche Kosten = $\Theta(1)$
- **Union(H_1, H_2)**: Amortisierte Kosten = tatsächliche Kosten = $\Theta(1)$

Amortisierte Kosten ExtractMin

- Anzahl der Bäume in der Wurzelliste $t(H)$.
- Tatsächliche Kosten der ExtractMin Operation: $\mathcal{O}(\log n + t(H))$.
- Nach dem Verschmelzen noch $\mathcal{O}(\log n)$ Knoten.
- Anzahl der Markierungen kann beim Verschmelzen der Bäume maximal kleiner werden.
- Amortisierte Kosten von ExtractMin also maximal

$$\mathcal{O}(\log n + t(H)) + \mathcal{O}(\log n) - \mathcal{O}(t(H)) = \mathcal{O}(\log n).$$

Amortisierte Kosten DecreaseKey

- Annahme: DecreaseKey führt zu c Abtrennungen eines Knotens von seinem Vaterknoten, tatsächliche Kosten $\mathcal{O}(c)$
- c Knoten kommen zur Wurzelliste hinzu
- Löschen von $(c - 1)$ Markierungen, Hinzunahme maximal einer Markierung
- Amortisierte Kosten von DecreaseKey:

$$\mathcal{O}(c) + (t(H) + c) + 2 \cdot (m(H) - c + 2) - (t(H) + 2m(H)) = \mathcal{O}(1)$$