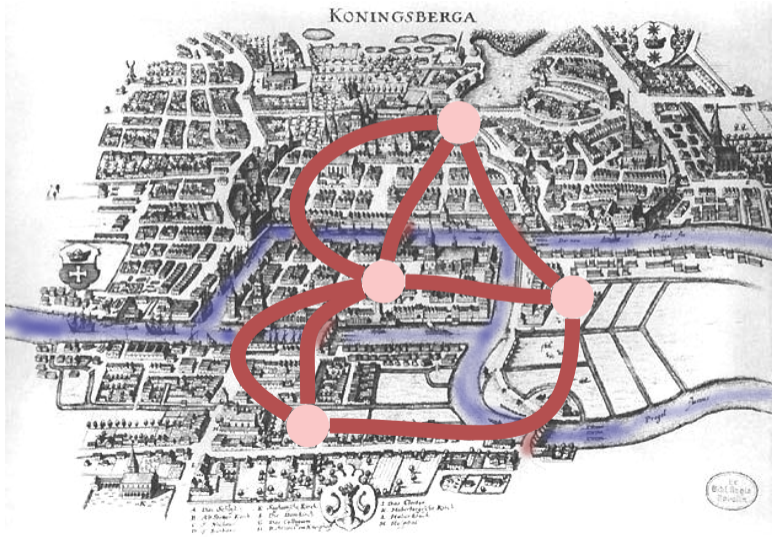


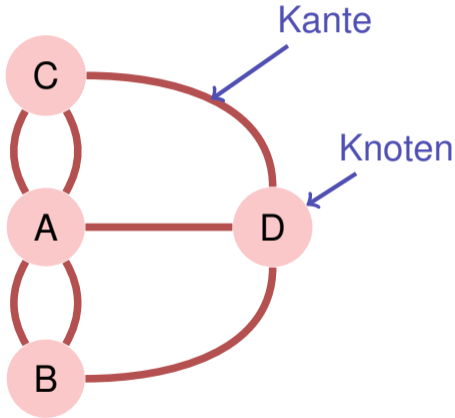
22. Graphen

Reflexive transitive Hülle, Traversieren (DFS, BFS),
Zusammenhangskomponenten, Topologisches Sortieren
Ottman/Widmayer, Kap. 9.1 - 9.4, Cormen et al, Kap. 22

Königsberg 1736



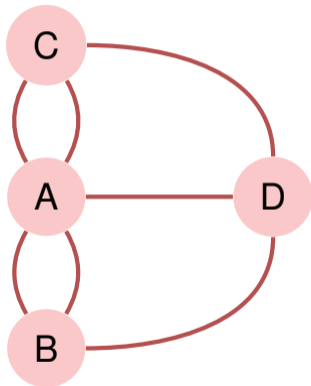
Graph



Zyklen

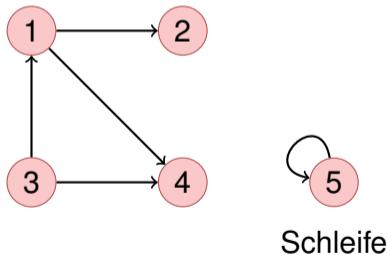
- Gibt es einen Rundweg durch die Stadt (den Graphen), welcher jede Brücke (jede Kante) genau einmal benutzt?
- Euler (1736): nein.
- Solcher Rundweg (*Zyklus*) heisst *Eulerscher Kreis*.
- Eulerzyklus \Leftrightarrow jeder Knoten hat gerade Anzahl Kanten (jeder Knoten hat einen *geraden Grad*).

“ \Rightarrow ” ist klar, “ \Leftarrow ” ist etwas schwieriger



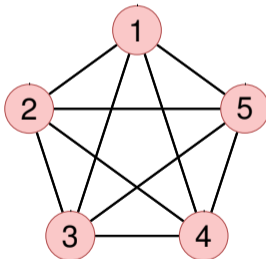
Notation

Ein *gerichteter Graph* besteht aus einer Menge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ von Knoten (*Vertices*) und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von Kanten (*Edges*). Gleiche Kanten dürfen nicht mehrfach enthalten sein.



Notation

Ein *ungerichteter Graph* besteht aus einer Menge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ von Knoten und einer Menge $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V\}$ von Kanten. Kanten dürfen nicht mehrfach enthalten sein.³¹



ein vollständiger ungerichteter Graph

³¹Im Gegensatz zum Eingangsbeispiel – andernfalls Multigraph genannt.

Notation

Ein Graph $G = (V, E)$ in dem E jede mögliche Kante enthält heisst *vollständig*.

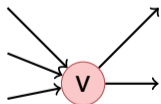
Ein Graph, bei dem V so in disjunkte U und W aufgeteilt werden kann, dass alle $e \in E$ einen Knoten in U und einen in W haben heisst *bipartit*.

Ein *gewichteter Graph* $G = (V, E, c)$ ist ein Graph $G = (V, E)$ mit einer *Kantengewichtsfunktion* $c : E \rightarrow \mathbb{R}$. $c(e)$ heisst *Gewicht* der Kante e .

Notation

Für gerichtete Graphen $G = (V, E)$

- $w \in V$ heisst **adjazent** zu $v \in V$, falls $(v, w) \in E$
- **Vorgängermenge** von $v \in V$: $N^-(v) := \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$.
Nachfolgermenge: $N^+(v) := \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$
- **Eingangsgrad**: $\deg^-(v) = |N^-(v)|$,
Ausgangsgrad: $\deg^+(v) = |N^+(v)|$



$$\deg^-(v) = 3, \deg^+(v) = 2$$

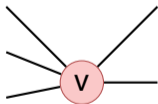


$$\deg^-(w) = 1, \deg^+(w) = 1$$

Notation

Für ungerichtete Graphen $G = (V, E)$:

- $w \in V$ heisst **adjazent** zu $v \in V$, falls $\{v, w\} \in E$
- **Nachbarschaft** von $v \in V$: $N(v) = \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$
- **Grad** von v : $\deg(v) = |N(v)|$ mit Spezialfall Schleifen: erhöhen Grad um 2.



$$\deg(v) = 5$$



$$\deg(w) = 2$$

Beziehung zwischen Knotengraden und Kantenzahl

In jedem Graphen $G = (V, E)$ gilt

- 1 $\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$, falls G gerichtet
- 2 $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, falls G ungerichtet.

Wege

- **Weg**: Sequenz von Knoten $\langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle$ so dass für jedes $i \in \{1 \dots k\}$ eine Kante von v_i nach v_{i+1} existiert.
- **Länge** des Weges: Anzahl enthaltene Kanten k .
- **Gewicht** des Weges (in gewichteten Graphen): $\sum_{i=1}^k c((v_i, v_{i+1}))$
(bzw. $\sum_{i=1}^k c(\{v_i, v_{i+1}\})$)
- **Pfad**: Weg der keinen Knoten mehrfach verwendet.
- **Zusammenhängend**: Ungerichteter Graph, bei dem für jedes Paar $v, w \in V$ ein verbindender Weg existiert.

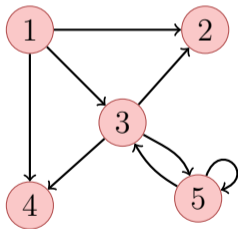
Zyklen

- **Zyklus**: Weg $\langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle$ mit $v_1 = v_{k+1}$
- **Kreis**: Zyklus mit paarweise verschiedenen v_1, \dots, v_k , welcher keine Kante mehrfach verwendet.
- **Kreisfrei (azyklisch)**: Graph ohne jegliche Kreise.

Eine Folgerung: Ungerichtete Graphen können keinen Kreis der Länge 2 enthalten (Schleifen haben Länge 1).

Repräsentation mit Matrix

Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge v_1, \dots, v_n gespeichert als **Adjazenzmatrix** $A_G = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ mit Einträgen aus $\{0, 1\}$. $a_{ij} = 1$ genau dann wenn Kante von v_i nach v_j .

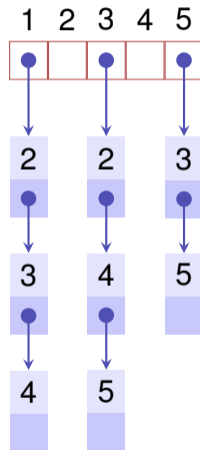
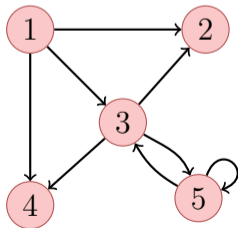


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Speicherbedarf $\Theta(|V|^2)$. A_G ist symmetrisch, wenn G ungerichtet.

Repräsentation mit Liste

Viele Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge v_1, \dots, v_n haben deutlich weniger als n^2 Kanten. Repräsentation mit **Adjazenzliste**: Array $A[1], \dots, A[n]$, A_i enthält verkettete Liste aller Knoten in $N^+(v_i)$.



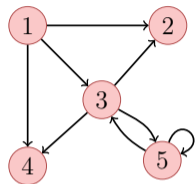
Speicherbedarf $\Theta(|V| + |E|)$.

Laufzeiten einfacher Operationen

Operation	Matrix	Liste
Nachbarn von $v \in V$ finden	$\Theta(n)$	$\Theta(\deg^+ v)$
$v \in V$ ohne Nachbar finden	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n)$
$(u, v) \in E$?	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\deg^+ v)$
Kante einfügen	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
Kante löschen	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\deg^+ v)$

Adjazenzmatrizen multipliziert

$$B := A_G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Interpretation

Theorem

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt das Element $a_{i,j}^{(k)}$ der Matrix $(a_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n} = A_G^k$ die Anzahl der Wege mit Länge k von v_i nach v_j an.

Beweis

Per Induktion.

Anfang: Klar für $k = 1$. $a_{i,j} = a_{i,j}^{(1)}$.

Hypothese: Aussage wahr für alle $k \leq l$

Schritt ($l \rightarrow l + 1$):

$$a_{i,j}^{(l+1)} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^{(l)} \cdot a_{k,j}$$

$a_{k,j} = 1$ g.d.w. Kante von k nach j , 0 sonst. Obige Summe zählt somit alle Knoten, die direkte Verbindung haben zu v_j und zu denen Weg der Länge l von v_i existiert, d.h. alle Wege der Länge $l + 1$.

Kürzester Weg

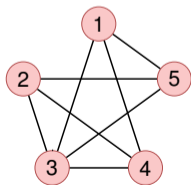
Frage: existiert Weg von i nach j ? Wie lang ist der kürzeste Weg?

Antwort: Potenziere A_G bis für ein $k < n$ gilt $a_{i,j}^{(k)} > 0$. k gibt die Weglänge des kürzesten Weges. Wenn $a_{i,j}^{(k)} = 0$ für alle $1 \leq k < n$, so gibt es keinen Weg von i nach j .

Anzahl Dreiecke

Frage: Wie viele Dreieckswege enthält ein ungerichteter Graph?

Antwort: Entferne alle Zyklen (Diagonaleinträge). Berechne A_G^3 . $a_{ii}^{(3)}$ bestimmt die Anzahl Wege der Länge 3, die i enthalten. Es gibt 6 verschiedene Permutationen eines Dreiecksweges. Damit Anzahl Dreiecke: $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(3)} / 6$.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 24/6 = 4 \text{ Dreiecke.}$$

Graphen und Relationen

Graph $G = (V, E)$ mit Adjazenzen $A_G \hat{=} \text{Relation } E \subseteq V \times V \text{ auf } V$

- *reflexiv* $\Leftrightarrow a_{i,i} = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- *symmetrisch* $\Leftrightarrow a_{i,j} = a_{j,i}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ (ungerichtet)
- *transitiv* $\Leftrightarrow (u, v) \in E, (v, w) \in E \Rightarrow (u, w) \in E$.

Äquivalenzrelation \Leftrightarrow Kollektion vollständiger, ungerichteter Graphen, für den jedes Element eine Schleife hat.

Reflexive transitive Hülle von $G \Leftrightarrow$ *Erreichbarkeitsrelation* E^* :
 $(v, w) \in E^*$ gdw. \exists Weg von Knoten v zu w .

Berechnung Reflexive Transitive Hülle

Ziel: Berechnung von $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ mit $b_{ij} = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E^*$

Beobachtung: $a_{ij} = 1$ bedeutet bereits $(v_i, v_j) \in E^*$.

Erste Idee:

- Starte mit $B \leftarrow A$ und setze $b_{ii} = 1$ für alle i (Reflexivität).
- Iteriere über i, j, k und setze $b_{ij} = 1$, wenn $b_{ik} = 1$ und $b_{kj} = 1$.
Dann alle Wege der Länge 1 und 2 berücksichtigt
- Wiederhole Iteration \Rightarrow alle Wege der Länge 1 ... 4 berücksichtigt.
- $\lceil \log_2 n \rceil$ Wiederholungen nötig.

Verbesserung: Algorithmus von Warshall (1962)

Induktiver Ansatz: Alle Wege bekannt über Knoten aus $\{v_i : i < k\}$.
Hinzunahme des Knotens v_k .

Algorithmus ReflexiveTransitiveClosure(A_G)

Input : Adjazenzmatrix $A_G = (a_{ij})_{i,j=1}^n$

Output : Reflexive Transitive Hülle $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ von G

$B \leftarrow A_G$

for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**

$a_{kk} \leftarrow 1$

// Reflexivität

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**

$b_{ij} \leftarrow \max\{b_{ij}, b_{ik} \cdot b_{kj}\}$

// Alle Wege über v_k

return B

Laufzeit des Algorithmus $\Theta(n^3)$.

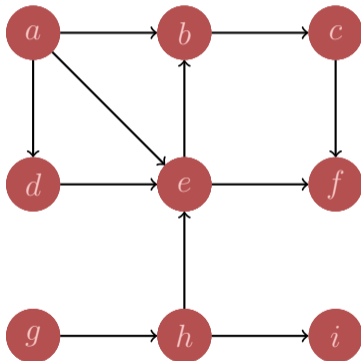
Korrektheit des Algorithmus (Induktion)

Invariante (k): alle Wege über Knoten mit maximalem Index $< k$ berücksichtigt

- Anfang ($k = 1$): Alle direkten Wege (alle Kanten) in A_G berücksichtigt.
- Hypothese: Invariante (k) erfüllt.
- Schritt ($k \rightarrow k + 1$): Für jeden Weg von v_i nach v_j über Knoten mit maximalen Index k : nach Hypothese $b_{ik} = 1$ und $b_{kj} = 1$. Somit im k -ten Schleifendurchlauf: $b_{ij} \leftarrow 1$.

Graphen Traversieren: Tiefensuche

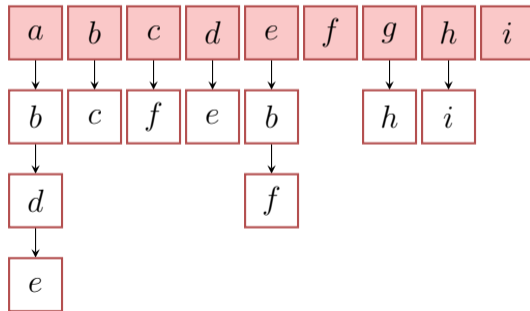
Verfolge zuerst Pfad in die Tiefe, bis nichts mehr besucht werden kann.



Reihenfolge

$a, b, c, f, d, e, g, h, i$

Adjazenzliste



Algorithmus Tiefensuche DFS-Visit(G, v)

Input : Graph $G = (V, E)$, Knoten v .

Markiere v als besucht

```
foreach  $(v, w) \in E$  do  
  if  $\neg(w \text{ besucht})$  then  
    DFS-Visit( $w$ )
```

Tiefensuche ab Knoten v . Laufzeit (ohne Rekursion): $\Theta(\text{deg}^+ v)$

Algorithmus Tiefensuche DFS-Visit(G)

Input : Graph $G = (V, E)$

foreach $v \in V$ **do**

```
┌   if  $\neg(v \text{ besucht})$  then  
└   ┌   DFS-Visit( $G, v$ )  
└   └
```

Tiefensuche für alle Knoten eines Graphen. Laufzeit

$$\Theta(|V| + \sum_{v \in V} (\deg^+(v) + 1)) = \Theta(|V| + |E|).$$

Problem der Rekursion?

Sehr tiefe Graphen können Stack-Überlauf erzeugen.

Iteratives DFS-Visit(G, v)

Input : Graph $G = (V, E)$

Stack $S \leftarrow \emptyset$; push(S, v)

while $S \neq \emptyset$ **do**

$w \leftarrow \text{pop}(S)$

if $\neg(w \text{ besucht})$ **then**

 Markiere w besucht

foreach $(w, c) \in E$ **do** // (ggfs umgekehrt einfügen)

if $\neg(c \text{ besucht})$ **then**

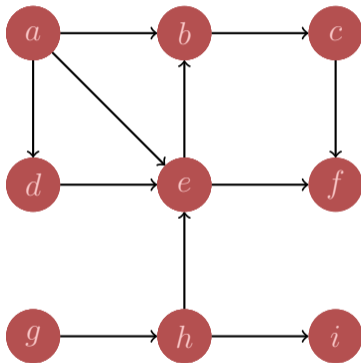
 push(S, x)

Stapelgrösse bis zu $|E|$, für jeden Knoten maximal Extraaufwand $\Theta(\text{deg}^+(w) + 1)$. Gesamt: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Mit Aufruf aus obigem Rahmenprogramm: $\Theta(|V| + |E|)$

Graphen Traversieren: Breitensuche

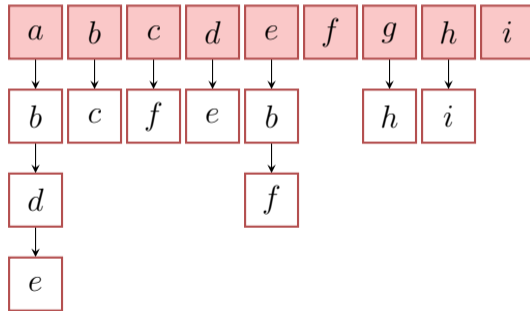
Verfolge zuerst Pfad in die Breite, gehe dann in die Tiefe.



Reihenfolge

$a, b, d, e, c, f, g, h, i$

Adjazenzliste



Iteratives BFS-Visit(G, v)

Input : Graph $G = (V, E)$

Queue $Q \leftarrow \emptyset$

Markiere v aktiv

enqueue(Q, v)

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$w \leftarrow$ dequeue(Q)

 Markiere w besucht

foreach $(w, c) \in E$ **do**

if $\neg(c$ besucht $\vee c$ aktiv) **then**

 Markiere c aktiv

 enqueue(Q, c)

- Algorithmus kommt mit $\mathcal{O}(|V|)$ Extraplatz aus. (Warum funktioniert dieser simple Trick nicht beim DFS?)
- Gesamtlaufzeit mit Rahmenprogramm: $\Theta(|V| + |E|)$.

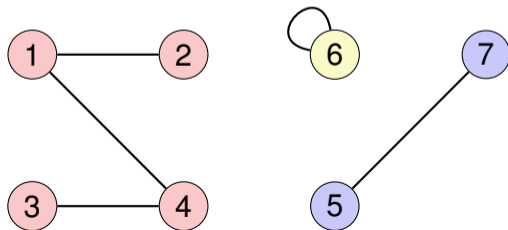
Zusammenhangskomponenten

Zusammenhangskomponenten eines ungerichteten Graphen G :
Äquivalenzklassen der reflexiven, transitiven Hülle von G .

Zusammenhangskomponente = Teilgraph $G' = (V', E')$,

$E' = \{\{v, w\} \in E \mid v, w \in V'\}$ mit

$\{\{v, w\} \in E \mid v \in V' \vee w \in V'\} = E = \{\{v, w\} \in E \mid v \in V' \wedge w \in V'\}$



Graph mit Zusammenhangskomponenten $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 7\}$, $\{6\}$.

Berechnung der Zusammenhangskomponenten

- Berechnung einer Partitionierung von V in paarweise disjunkte Teilmengen V_1, \dots, V_k
- so dass jedes V_i die Knoten einer Zusammenhangskomponente enthält.
- Algorithmus: Tiefen- oder Breitensuche. Bei jedem Neustart von $\text{DFSSearch}(G, v)$ oder $\text{BFSSearch}(G, v)$ neue leere Zusammenhangskomponente erstellen und alle traversierten Knoten einfügen.

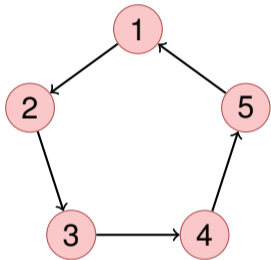
Topologische Sortierung

Topologische Sortierung eines azyklischen gerichteten Graphen $G = (V, E)$: Bijektive Abbildung

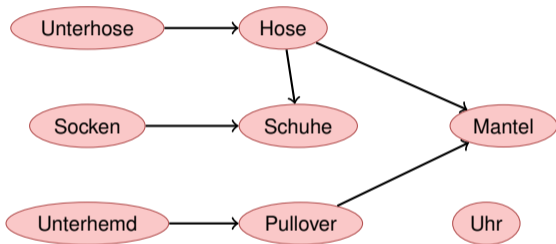
$$\text{ord} : V \rightarrow \{1, \dots, |V|\} \quad | \quad \text{ord}(v) < \text{ord}(w) \quad \forall (v, w) \in E.$$

Können Wert i auch identifizieren mit v_i . Topologische Sortierung $\hat{=}$ $\langle v_1, \dots, v_{|V|} \rangle$.

(Gegen-)Beispiele



Zyklischer Graph: kann nicht topologisch sortiert werden.



Eine mögliche Topologische Sortierung des Graphen:
Unterhemd,Pullover,Unterhose,Uhr,Hose,Mantel,Socken,Schuhe

Beobachtung

Theorem

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann eine topologische Sortierung, wenn er kreisfrei ist

Beweis " \Rightarrow ": Wenn G einen Kreis besitzt, so besitzt er keine topologische Sortierung. Denn in einem Kreis $\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_m} \rangle$ gälte $v_{i_1} < \dots < v_{i_m} < v_{i_1}$.

Induktiver Beweis Gegenrichtung

- Anfang ($n = 1$): Graph mit einem Knoten ohne Schleife ist topologisch sortierbar. Setze $\text{ord}(v_1) = 1$.
- Hypothese: Graph mit n Knoten kann topologisch sortiert werden.
- Schritt ($n \rightarrow n + 1$):
 - 1 G enthält einen Knoten v_q mit Eingangsgrad $\text{deg}^-(v_q) = 0$. Andernfalls verfolge iterativ Kanten rückwärts – nach spätestens $n + 1$ Iterationen würde man einen Knoten besuchen, welcher bereits besucht wurde. Widerspruch zur Zyklenfreiheit.
 - 2 Graph ohne Knoten v_q und ohne dessen Eingangskanten kann nach Hypothese topologisch sortiert werden. Verwende diese Sortierung, setze $\text{ord}(v_i) \leftarrow \text{ord}(v_i) + 1$ für alle $i \neq q$ und setze $\text{ord}(v_q) \leftarrow 1$.

Algorithmus, vorläufiger Entwurf

Graph $G = (V, E)$. $d \leftarrow 1$

- 1 Traversiere von beliebigem Knoten rückwärts bis ein Knoten v_q mit Eingangsgrad 0 gefunden ist.
- 2 Wird kein Knoten mit Eingangsgrad 0 gefunden (n Schritte), dann Zyklus gefunden.
- 3 Setze $\text{ord}(v_q) \leftarrow d$.
- 4 Entferne v_q und seine Kanten von G .
- 5 Wenn $V \neq \emptyset$, dann $d \leftarrow d + 1$, gehe zu Schritt 1.

Laufzeit im schlechtesten Fall: $\Omega(|V|^2)$.

Verbesserung

Idee?

Berechne die Eingangsgrade der Knoten im Voraus und durchlaufe dann jeweils die Knoten mit Eingangsgrad 0 die Eingangsgrade der Nachfolgeknoten korrigierend.

Algorithmus Topological-Sort(G)

Input : Graph $G = (V, E)$.

Output : Topologische Sortierung ord

Stack $S \leftarrow \emptyset$

foreach $v \in V$ **do** $A[v] \leftarrow 0$

foreach $(v, w) \in E$ **do** $A[w] \leftarrow A[w] + 1$ // Eingangsgrade berechnen

foreach $v \in V$ with $A[v] = 0$ **do** $\text{push}(S, v)$ // Merke Nodes mit Eingangsgrad 0

$i \leftarrow 1$

while $S \neq \emptyset$ **do**

$v \leftarrow \text{pop}(S)$; $\text{ord}[v] \leftarrow i$; $i \leftarrow i + 1$ // Wähle Knoten mit Eingangsgrad 0

foreach $(v, w) \in E$ **do** // Verringere Eingangsgrad der Nachfolger

$A[w] \leftarrow A[w] - 1$

if $A[w] = 0$ **then** $\text{push}(S, w)$

if $i = |V| + 1$ **then return** ord **else return** "Cycle Detected"

Algorithmus Korrektheit

Theorem

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, kreisfreier Graph. Der Algorithmus $\text{TopologicalSort}(G)$ berechnet in Zeit $\Theta(|V| + |E|)$ eine topologische Sortierung ord für G .

Beweis: folgt im wesentlichen aus vorigem Theorem:

- 1 Eingangsgrad verringern entspricht Knotenentfernen.
- 2 Im Algorithmus gilt für jeden Knoten v mit $A[v] = 0$ dass entweder der Knoten Eingangsgrad 0 hat oder dass zuvor alle Vorgänger einen Wert $\text{ord}[u] \leftarrow i$ zugewiesen bekamen und somit $\text{ord}[v] > \text{ord}[u]$ für alle Vorgänger u von v . Knoten werden nur einmal auf den Stack gelegt.
- 3 Laufzeit: Inspektion des Algorithmus (mit Argumenten wie beim Traversieren).

Algorithmus Korrektheit

Theorem

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, nicht kreisfreier Graph. Der Algorithmus $\text{TopologicalSort}(G)$ terminiert in Zeit $\Theta(|V| + |E|)$ und detektiert Zyklus.

Beweis: Sei $\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \rangle$ ein Kreis in G . In jedem Schritt des Algorithmus bleibt $A[v_{i_j}] \geq 1$ für alle $j = 1, \dots, k$. Also werden k Knoten nie auf den Stack gelegt und somit ist zum Schluss $i \leq V + 1 - k$.

Die Laufzeit des zweiten Teils des Algorithmus kann kürzer werden, jedoch kostet die Berechnung der Eingangsgrade bereits $\Theta(|V| + |E|)$.