

20. Dynamic Programming II

Subset Sum Problem, Rucksackproblem, Greedy Algorithmus, Lösungen mit dynamischer Programmierung, FPTAS, Optimaler Suchbaum [Ottman/Widmayer, Kap. 7.2, 7.3, 5.7, Cormen et al, Kap. 15,35.5]

Aufgabe

Hannes und Niklas sollen eine grosse Menge Geschenke unterschiedlichen monetären Wertes bekommen.

Die Eltern wollen die Geschenke vorher so gerecht aufteilen, dass kein Streit eintritt. Frage: wie geht das?

Aufgabe

Hannes und Niklas sollen eine grosse Menge Geschenke unterschiedlichen monetären Wertes bekommen.

Die Eltern wollen die Geschenke vorher so gerecht aufteilen, dass kein Streit eintritt. Frage: wie geht das?

Antwort: wer Kinder hat, der weiss dass diese Aufgabe keine Lösung hat.

Realistischere Aufgabe



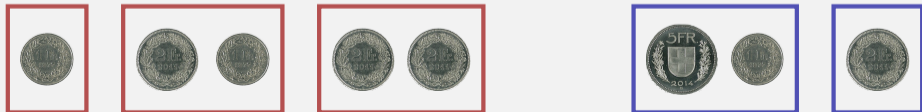
Teile obige “Gegenstände” so auf zwei Mengen auf, dass beide Mengen den gleichen Wert haben.

Realistischere Aufgabe



Teile obige "Gegenstände" so auf zwei Mengen auf, dass beide Mengen den gleichen Wert haben.

Eine Lösung:



Subset Sum Problem

Seien $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ gegeben.

Ziel: Entscheide, ob eine Auswahl $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ existiert mit

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus I} a_i.$$

Naiver Algorithmus

Prüfe für jeden Bitvektor $b = (b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$, ob

$$\sum_{i=1}^n b_i a_i \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^n (1 - b_i) a_i$$

Naiver Algorithmus

Prüfe für jeden Bitvektor $b = (b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$, ob

$$\sum_{i=1}^n b_i a_i \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^n (1 - b_i) a_i$$

Schlechtester Fall: n Schritte für jeden der 2^n Bitvektoren b . Anzahl Schritte: $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$.

Algorithmus mit Aufteilung

- Zerlege Eingabe in zwei gleich grosse Teile: $a_1, \dots, a_{n/2}$ und $a_{n/2+1}, \dots, a_n$.

Algorithmus mit Aufteilung

- Zerlege Eingabe in zwei gleich grosse Teile: $a_1, \dots, a_{n/2}$ und $a_{n/2+1}, \dots, a_n$.
- Iteriere über alle Teilmengen der beiden Teile und berechne Teilsummen $S_1^k, \dots, S_{2^{n/2}}^k$ ($k = 1, 2$).

Algorithmus mit Aufteilung

- Zerlege Eingabe in zwei gleich grosse Teile: $a_1, \dots, a_{n/2}$ und $a_{n/2+1}, \dots, a_n$.
- Iteriere über alle Teilmengen der beiden Teile und berechne Teilsummen $S_1^k, \dots, S_{2^{n/2}}^k$ ($k = 1, 2$).
- Sortiere die Teilsummen: $S_1^k \leq S_2^k \leq \dots \leq S_{2^{n/2}}^k$.

Algorithmus mit Aufteilung

- Zerlege Eingabe in zwei gleich grosse Teile: $a_1, \dots, a_{n/2}$ und $a_{n/2+1}, \dots, a_n$.
- Iteriere über alle Teilmengen der beiden Teile und berechne Teilsummen $S_1^k, \dots, S_{2^{n/2}}^k$ ($k = 1, 2$).
- Sortiere die Teilsummen: $S_1^k \leq S_2^k \leq \dots \leq S_{2^{n/2}}^k$.
- Prüfe ob es Teilsummen gibt, so dass $S_i^1 + S_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i =: h$

Algorithmus mit Aufteilung

- Zerlege Eingabe in zwei gleich grosse Teile: $a_1, \dots, a_{n/2}$ und $a_{n/2+1}, \dots, a_n$.
- Iteriere über alle Teilmengen der beiden Teile und berechne Teilsummen $S_1^k, \dots, S_{2^{n/2}}^k$ ($k = 1, 2$).
- Sortiere die Teilsummen: $S_1^k \leq S_2^k \leq \dots \leq S_{2^{n/2}}^k$.
- Prüfe ob es Teilsummen gibt, so dass $S_i^1 + S_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i =: h$
 - Beginne mit $i = 1, j = 2^{n/2}$.

Algorithmus mit Aufteilung

- Zerlege Eingabe in zwei gleich grosse Teile: $a_1, \dots, a_{n/2}$ und $a_{n/2+1}, \dots, a_n$.
- Iteriere über alle Teilmengen der beiden Teile und berechne Teilsummen $S_1^k, \dots, S_{2^{n/2}}^k$ ($k = 1, 2$).
- Sortiere die Teilsummen: $S_1^k \leq S_2^k \leq \dots \leq S_{2^{n/2}}^k$.
- Prüfe ob es Teilsummen gibt, so dass $S_i^1 + S_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i =: h$
 - Beginne mit $i = 1, j = 2^{n/2}$.
 - Gilt $S_i^1 + S_j^2 = h$ dann fertig

Algorithmus mit Aufteilung

- Zerlege Eingabe in zwei gleich grosse Teile: $a_1, \dots, a_{n/2}$ und $a_{n/2+1}, \dots, a_n$.
- Iteriere über alle Teilmengen der beiden Teile und berechne Teilsummen $S_1^k, \dots, S_{2^{n/2}}^k$ ($k = 1, 2$).
- Sortiere die Teilsummen: $S_1^k \leq S_2^k \leq \dots \leq S_{2^{n/2}}^k$.
- Prüfe ob es Teilsummen gibt, so dass $S_i^1 + S_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i =: h$
 - Beginne mit $i = 1, j = 2^{n/2}$.
 - Gilt $S_i^1 + S_j^2 = h$ dann fertig
 - Gilt $S_i^1 + S_j^2 > h$ dann $j \leftarrow j - 1$

Algorithmus mit Aufteilung

- Zerlege Eingabe in zwei gleich grosse Teile: $a_1, \dots, a_{n/2}$ und $a_{n/2+1}, \dots, a_n$.
- Iteriere über alle Teilmengen der beiden Teile und berechne Teilsummen $S_1^k, \dots, S_{2^{n/2}}^k$ ($k = 1, 2$).
- Sortiere die Teilsummen: $S_1^k \leq S_2^k \leq \dots \leq S_{2^{n/2}}^k$.
- Prüfe ob es Teilsummen gibt, so dass $S_i^1 + S_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i =: h$
 - Beginne mit $i = 1, j = 2^{n/2}$.
 - Gilt $S_i^1 + S_j^2 = h$ dann fertig
 - Gilt $S_i^1 + S_j^2 > h$ dann $j \leftarrow j - 1$
 - Gilt $S_i^1 + S_j^2 < h$ dann $i \leftarrow i + 1$

Beispiel

Menge $\{1, 6, 2, 3, 4\}$ mit Wertesumme 16 hat 32 Teilmengen.

Beispiel

Menge $\{1, 6, 2, 3, 4\}$ mit Wertesumme 16 hat 32 Teilmengen.

Aufteilung in $\{1, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$ ergibt folgende 12 Teilmengen mit Wertesummen:

Beispiel

Menge $\{1, 6, 2, 3, 4\}$ mit Wertesumme 16 hat 32 Teilmengen.

Aufteilung in $\{1, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$ ergibt folgende 12 Teilmengen mit Wertesummen:

$\{1, 6\}$				$\{2, 3, 4\}$							
$\{\}$	$\{1\}$	$\{6\}$	$\{1, 6\}$	$\{\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\{2, 3, 4\}$
0	1	6	7	0	2	3	4	5	6	7	9

Beispiel

Menge $\{1, 6, 2, 3, 4\}$ mit Wertesumme 16 hat 32 Teilmengen.

Aufteilung in $\{1, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$ ergibt folgende 12 Teilmengen mit Wertesummen:

$\{1, 6\}$				$\{2, 3, 4\}$							
$\{\}$	$\{1\}$	$\{6\}$	$\{1, 6\}$	$\{\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\{2, 3, 4\}$
0	1	6	7	0	2	3	4	5	6	7	9

Beispiel

Menge $\{1, 6, 2, 3, 4\}$ mit Wertesumme 16 hat 32 Teilmengen.

Aufteilung in $\{1, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$ ergibt folgende 12 Teilmengen mit Wertesummen:

$\{1, 6\}$				$\{2, 3, 4\}$							
$\{\}$	$\{1\}$	$\{6\}$	$\{1, 6\}$	$\{\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\{2, 3, 4\}$
0	1	6	7	0	2	3	4	5	6	7	9

Beispiel

Menge $\{1, 6, 2, 3, 4\}$ mit Wertesumme 16 hat 32 Teilmengen.

Aufteilung in $\{1, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$ ergibt folgende 12 Teilmengen mit Wertesummen:

$\{1, 6\}$					$\{2, 3, 4\}$							
$\{\}$	$\{1\}$	$\{6\}$	$\{1, 6\}$		$\{\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\{2, 3, 4\}$
0	1	6	7		0	2	3	4	5	6	7	9

Beispiel

Menge $\{1, 6, 2, 3, 4\}$ mit Wertesumme 16 hat 32 Teilmengen.

Aufteilung in $\{1, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$ ergibt folgende 12 Teilmengen mit Wertesummen:

$\{1, 6\}$					$\{2, 3, 4\}$							
$\{\}$	$\{1\}$	$\{6\}$	$\{1, 6\}$		$\{\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\{2, 3, 4\}$
0	1	6	7		0	2	3	4	5	6	7	9

\Leftrightarrow Eine Lösung: $\{1, 3, 4\}$

Analyse

- Teilsummegenerierung in jedem Teil: $\mathcal{O}(2^{n/2} \cdot n)$.
- Sortieren jeweils: $\mathcal{O}(2^{n/2} \log(2^{n/2})) = \mathcal{O}(n2^{n/2})$.
- Zusammenführen: $\mathcal{O}(2^{n/2})$

Gesamtlaufzeit

$$\mathcal{O}\left(n \cdot 2^{n/2}\right) = \mathcal{O}\left(n \left(\sqrt{2}\right)^n\right).$$

Wesentliche Verbesserung gegenüber ganz naivem Verfahren –
aber immer noch exponentiell!

Dynamische Programmierung

Aufgabe: sei $z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$. Suche Auswahl $I \subset \{1, \dots, n\}$, so dass $\sum_{i \in I} a_i = z$.

Dynamische Programmierung

Aufgabe: sei $z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$. Suche Auswahl $I \subset \{1, \dots, n\}$, so dass $\sum_{i \in I} a_i = z$.

DP-Tabelle: $[0, \dots, n] \times [0, \dots, z]$ -Tabelle T mit Wahrheitseinträgen. $T[k, s]$ gibt an, ob es eine Auswahl $I_k \subset \{1, \dots, k\}$ gibt, so dass $\sum_{i \in I_k} a_i = s$.

Dynamische Programmierung

Aufgabe: sei $z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$. Suche Auswahl $I \subset \{1, \dots, n\}$, so dass $\sum_{i \in I} a_i = z$.

DP-Tabelle: $[0, \dots, n] \times [0, \dots, z]$ -Tabelle T mit Wahrheitseinträgen. $T[k, s]$ gibt an, ob es eine Auswahl $I_k \subset \{1, \dots, k\}$ gibt, so dass $\sum_{i \in I_k} a_i = s$.

Initialisierung: $T[0, 0] = \text{true}$. $T[0, s] = \text{false}$ für $s > 0$.

Dynamische Programmierung

Aufgabe: sei $z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$. Suche Auswahl $I \subset \{1, \dots, n\}$, so dass $\sum_{i \in I} a_i = z$.

DP-Tabelle: $[0, \dots, n] \times [0, \dots, z]$ -Tabelle T mit Wahrheitseinträgen. $T[k, s]$ gibt an, ob es eine Auswahl $I_k \subset \{1, \dots, k\}$ gibt, so dass $\sum_{i \in I_k} a_i = s$.

Initialisierung: $T[0, 0] = \text{true}$. $T[0, s] = \text{false}$ für $s > 0$.

Berechnung:

$$T[k, s] \leftarrow \begin{cases} T[k-1, s] & \text{falls } s < a_k \\ T[k-1, s] \vee T[k-1, s - a_k] & \text{falls } s \geq a_k \end{cases}$$

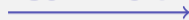
für aufsteigende k und innerhalb k dann s .

Beispiel

$\{1, 6, 2, 5\}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

summe s



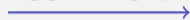
k



Beispiel

$\{1, 6, 2, 5\}$

summe s



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

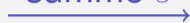
k



Beispiel

$\{1, 6, 2, 5\}$

summe s



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	●
1	●	●

k



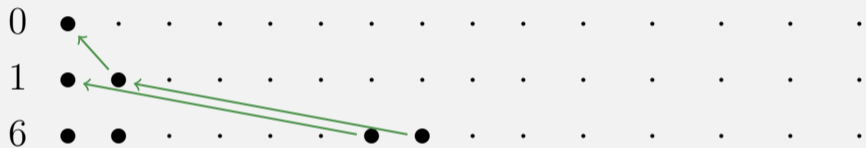
Beispiel

$\{1, 6, 2, 5\}$

summe s



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14



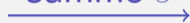
k



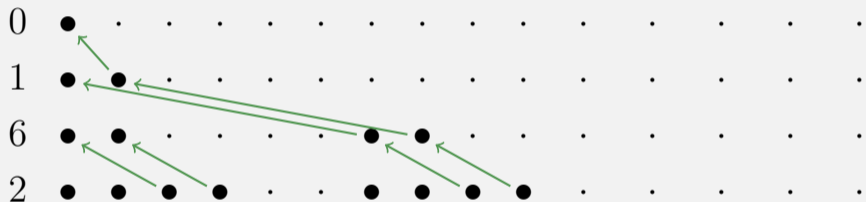
Beispiel

$\{1, 6, 2, 5\}$

summe s



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14



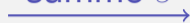
k



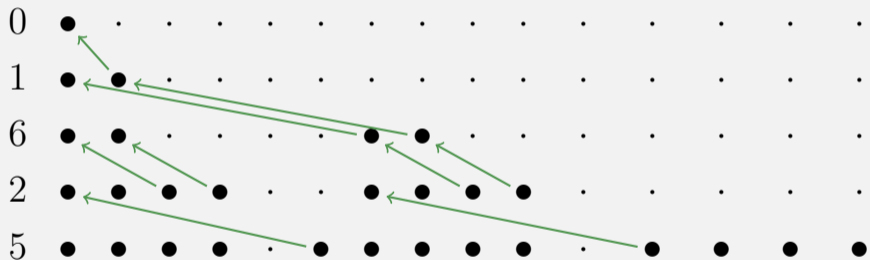
Beispiel

$\{1, 6, 2, 5\}$

summe s



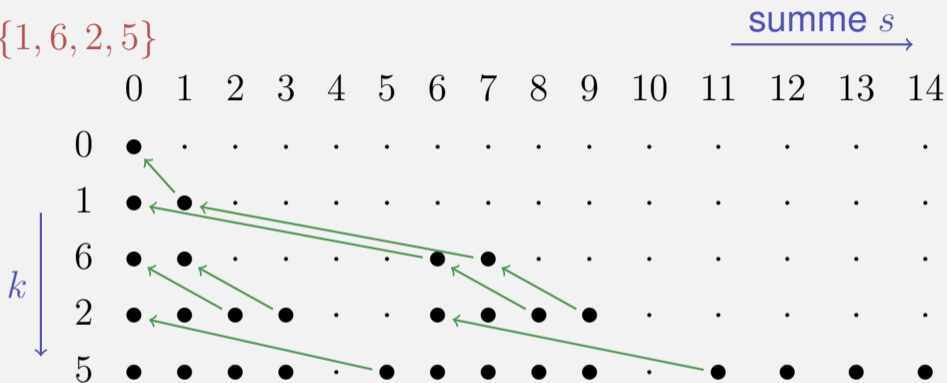
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14



k

Beispiel

$\{1, 6, 2, 5\}$



Auslesen der Lösung: wenn $T[k, s] = T[k - 1, s]$ dann a_k nicht benutzt und bei $T[k - 1, s]$ weiterfahren, andernfalls a_k benutzt und bei $T[k - 1, s - a_k]$ weiterfahren.

Rätselhaftes

Der Algorithmus benötigt $\mathcal{O}(n \cdot z)$ Elementaroperationen.

Rätselhaftes

Der Algorithmus benötigt $\mathcal{O}(n \cdot z)$ Elementaroperationen.

Was ist denn jetzt los? Hat der Algorithmus plötzlich polynomielle Laufzeit?

Rätselhaftes

Der Algorithmus benötigt $\mathcal{O}(n \cdot z)$ Elementaroperationen.

Was ist denn jetzt los? Hat der Algorithmus plötzlich polynomielle Laufzeit?

Aufgelöst

Der Algorithmus hat nicht unbedingt eine polynomielle Laufzeit. z ist eine *Zahl* und keine *Anzahl*!

Aufgelöst

Der Algorithmus hat nicht unbedingt eine polynomielle Laufzeit. z ist eine *Zahl* und keine *Anzahl*!

Eingabelänge des Algorithmus \cong Anzahl Bits zur *vernünftigen* Repräsentation der Daten. Bei der Zahl z wäre das $\zeta = \log z$.

Aufgelöst

Der Algorithmus hat nicht unbedingt eine polynomielle Laufzeit. z ist eine *Zahl* und keine *Anzahl*!

Eingabelänge des Algorithmus \cong Anzahl Bits zur *vernünftigen* Repräsentation der Daten. Bei der Zahl z wäre das $\zeta = \log z$.

Also: Algorithmus benötigt $\mathcal{O}(n \cdot 2^\zeta)$ Elementaroperationen und hat exponentielle Laufzeit in ζ .

Aufgelöst

Der Algorithmus hat nicht unbedingt eine polynomielle Laufzeit. z ist eine *Zahl* und keine *Anzahl*!

Eingabelänge des Algorithmus \cong Anzahl Bits zur *vernünftigen* Repräsentation der Daten. Bei der Zahl z wäre das $\zeta = \log z$.

Also: Algorithmus benötigt $\mathcal{O}(n \cdot 2^\zeta)$ Elementaroperationen und hat exponentielle Laufzeit in ζ .

Sollte z allerdings polynomiell sein in n , dann hat der Algorithmus polynomielle Laufzeit in n . Das nennt man *pseudopolynomiell*.

NP

Man weiss, dass der Subset-Sum Algorithmus zur Klasse der *NP*-vollständigen Probleme gehört (und somit *NP-schwer* ist).

²⁷Die bedeutendste ungelöste Frage der theoretischen Informatik!

NP

Man weiss, dass der Subset-Sum Algorithmus zur Klasse der *NP*-vollständigen Probleme gehört (und somit *NP-schwer* ist).

P: Menge aller in Polynomialzeit lösbarer Probleme.

NP: Menge aller Nichtdeterministisch in *P*olynomialzeit lösbarer Probleme.

²⁷Die bedeutendste ungelöste Frage der theoretischen Informatik!

NP

Man weiss, dass der Subset-Sum Algorithmus zur Klasse der *NP*-vollständigen Probleme gehört (und somit *NP-schwer* ist).

P: Menge aller in Polynomialzeit lösbarer Probleme.

NP: Menge aller **N**ichtdeterministisch in **P**olynomialzeit lösbarer Probleme.

Implikationen:

- NP enthält P.
- Probleme in Polynomialzeit *verifizierbar*.
- Unter der (noch?) unbewiesenen²⁷ Annahme, dass $NP \neq P$, gibt es für das Problem *keinen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit*.

²⁷Die bedeutendste ungelöste Frage der theoretischen Informatik!

Das Rucksackproblem

Wir packen unseren Koffer und nehmen mit ...

- Zahnbürste
- Hantelset
- Kaffeemaschine
- Oh jeh – zu schwer.

Das Rucksackproblem

Wir packen unseren Koffer und nehmen mit ...

- Zahnbürste
- Hantelset
- Kaffeemaschine
- Oh jeh – zu schwer.
- Zahnbürste
- Luftballon
- Taschenmesser
- Ausweis
- Hantelset
- Oh jeh – zu schwer.

Das Rucksackproblem

Wir packen unseren Koffer und nehmen mit ...

- Zahnbürste

- Hantelset

- Kaffemaschine

- Oh jeh – zu schwer.

- Zahnbürste

- Luftballon

- Taschenmesser

- Ausweis

- Hantelset

- Oh jeh – zu schwer.

- Zahnbürste

- Kaffemaschine

- Taschenmesser

- Ausweis

- Oh jeh – zu schwer.

Das Rucksackproblem

Wir packen unseren Koffer und nehmen mit ...

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ■ Zahnbürste | ■ Zahnbürste | ■ Zahnbürste |
| ■ Hantelset | ■ Luftballon | ■ Kaffemaschine |
| ■ Kaffemaschine | ■ Taschenmesser | ■ Taschenmesser |
| ■ Oh jeh – zu schwer. | ■ Ausweis | ■ Ausweis |
| | ■ Hantelset | ■ Oh jeh – zu schwer. |
| | ■ Oh jeh – zu schwer. | |

Wollen möglichst viel mitnehmen. Manche Dinge sind uns aber wichtiger als andere.

Rucksackproblem (engl. Knapsack problem)

Gegeben:

- Menge von $n \in \mathbb{N}$ Gegenständen $\{1, \dots, n\}$.
- Jeder Gegenstand i hat Nutzwert $v_i \in \mathbb{N}$ und Gewicht $w_i \in \mathbb{N}$.
- Maximalgewicht $W \in \mathbb{N}$.
- Bezeichnen die Eingabe mit $E = (v_i, w_i)_{i=1, \dots, n}$.

Rucksackproblem (engl. Knapsack problem)

Gegeben:

- Menge von $n \in \mathbb{N}$ Gegenständen $\{1, \dots, n\}$.
- Jeder Gegenstand i hat Nutzwert $v_i \in \mathbb{N}$ und Gewicht $w_i \in \mathbb{N}$.
- Maximalgewicht $W \in \mathbb{N}$.
- Bezeichnen die Eingabe mit $E = (v_i, w_i)_{i=1, \dots, n}$.

Gesucht:

eine Auswahl $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ die $\sum_{i \in I} v_i$ maximiert unter $\sum_{i \in I} w_i \leq W$.

Gierige (engl. greedy) Heuristik

Sortiere die Gegenstände absteigend nach Nutzen pro Gewicht

v_i/w_i : Permutation p mit $v_{p_i}/w_{p_i} \geq v_{p_{i+1}}/w_{p_{i+1}}$

Gierige (engl. greedy) Heuristik

Sortiere die Gegenstände absteigend nach Nutzen pro Gewicht
 v_i/w_i : Permutation p mit $v_{p_i}/w_{p_i} \geq v_{p_{i+1}}/w_{p_{i+1}}$

Füge Gegenstände in dieser Reihenfolge hinzu ($I \leftarrow I \cup \{p_i\}$),
sofern das zulässige Gesamtgewicht dadurch nicht überschritten
wird.

Gierige (engl. greedy) Heuristik

Sortiere die Gegenstände absteigend nach Nutzen pro Gewicht
 v_i/w_i : Permutation p mit $v_{p_i}/w_{p_i} \geq v_{p_{i+1}}/w_{p_{i+1}}$

Füge Gegenstände in dieser Reihenfolge hinzu ($I \leftarrow I \cup \{p_i\}$),
sofern das zulässige Gesamtgewicht dadurch nicht überschritten
wird.

Das ist schnell: $\Theta(n \log n)$ für Sortieren und $\Theta(n)$ für die Auswahl.
Aber ist es auch gut?

Gegenbeispiel zur greedy strategy

$$v_1 = 1 \quad w_1 = 1 \quad v_1/w_1 = 1$$

$$v_2 = W - 1 \quad w_2 = W \quad v_2/w_2 = \frac{W-1}{W}$$

Gegenbeispiel zur greedy strategy

$$v_1 = 1 \quad w_1 = 1 \quad v_1/w_1 = 1$$

$$v_2 = W - 1 \quad w_2 = W \quad v_2/w_2 = \frac{W-1}{W}$$

Greedy Algorithmus wählt $\{v_1\}$ mit Nutzwert 1.

Beste Auswahl: $\{v_2\}$ mit Nutzwert $W - 1$ und Gewicht W .

Greedy *kann* also beliebig schlecht sein.

Dynamic Programming

Unterteile das Maximalgewicht.

Dynamic Programming

Unterteile das Maximalgewicht.

Dreidimensionale Tabelle $m[i, w, v]$ (“machbar”) aus Wahrheitswerten.

Dynamic Programming

Unterteile das Maximalgewicht.

Dreidimensionale Tabelle $m[i, w, v]$ (“machbar”) aus Wahrheitswerten.

$m[i, w, v] = \text{true}$ genau dann wenn

- Auswahl der ersten i Teile existiert ($0 \leq i \leq n$)
- deren Gesamtgewicht höchstens w ($0 \leq w \leq W$) und
- Nutzen mindestens v ($0 \leq v \leq \sum_{i=1}^n v_i$) ist.

Berechnung der DP Tabelle

Initial

- $m[i, w, 0] \leftarrow \text{true}$ für alle $i \geq 0$ und alle $w \geq 0$.
- $m[0, w, v] \leftarrow \text{false}$ für alle $w \geq 0$ und alle $v > 0$.

Berechnung der DP Tabelle

Initial

- $m[i, w, 0] \leftarrow \text{true}$ für alle $i \geq 0$ und alle $w \geq 0$.
- $m[0, w, v] \leftarrow \text{false}$ für alle $w \geq 0$ und alle $v > 0$.

Berechnung

$$m[i, w, v] \leftarrow \begin{cases} m[i-1, w, v] \vee m[i-1, w-w_i, v-v_i] & \text{falls } w \geq w_i \text{ und } v \geq v_i \\ m[i-1, w, v] & \text{sonst.} \end{cases}$$

aufsteigend nach i und für festes i aufsteigend nach w und für festes i und w aufsteigend nach v .

Lösung: Grösstes v , so dass $m[i, w, v] = \text{true}$ für ein i und w .

Beobachtung

Nach der Definition des Problems gilt offensichtlich, dass

- für $m[i, w, v] = \text{true}$ gilt:
 - $m[i', w, v] = \text{true} \quad \forall i' \geq i$,
 - $m[i, w', v] = \text{true} \quad \forall w' \geq w$,
 - $m[i, w, v'] = \text{true} \quad \forall v' \leq w$.
- für $m[i, w, v] = \text{false}$ gilt:
 - $m[i', w, v] = \text{false} \quad \forall i' \leq i$,
 - $m[i, w', v] = \text{false} \quad \forall w' \leq w$,
 - $m[i, w, v'] = \text{false} \quad \forall v' \geq w$.

Das ist ein starker Hinweis darauf, dass wir keine 3d-Tabelle benötigen.

DP Tabelle mit 2 Dimensionen

Tabelleneintrag $t[i, w]$ enthält statt Wahrheitswerten das jeweils grösste v , das erreichbar ist²⁸ mit

- den Gegenständen $1, \dots, i$ ($0 \leq i \leq n$)
- bei höchstem zulässigen Gewicht w ($0 \leq w \leq W$).

²⁸So etwas ähnliches hätten wir beim Subset Sum Problem auch machen können, um die dünnbesetzte Tabelle etwas zu verkleinern

Berechnung

Initial

- $t[0, w] \leftarrow 0$ für alle $w \geq 0$.

Berechnung

$$t[i, w] \leftarrow \begin{cases} t[i-1, w] & \text{falls } w < w_i \\ \max\{t[i-1, w], t[i-1, w - w_i] + v_i\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

aufsteigend nach i und für festes i aufsteigend nach w .

Lösung steht in $t[n, w]$

Beispiel

$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & \xrightarrow{w} & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow i \\ \end{array}$$

Beispiel

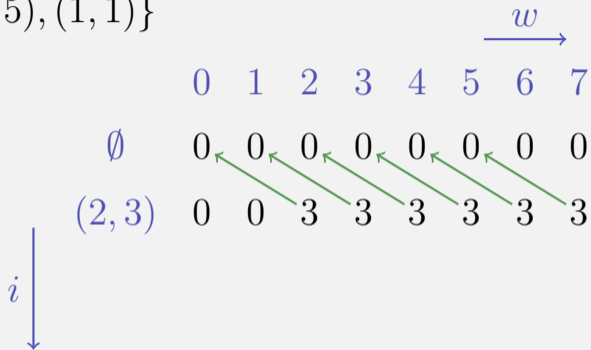
$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$

	\xrightarrow{w}								
	0	1	2	3	4	5	6	7	
\emptyset	0	0	0	0	0	0	0	0	0

i
↓

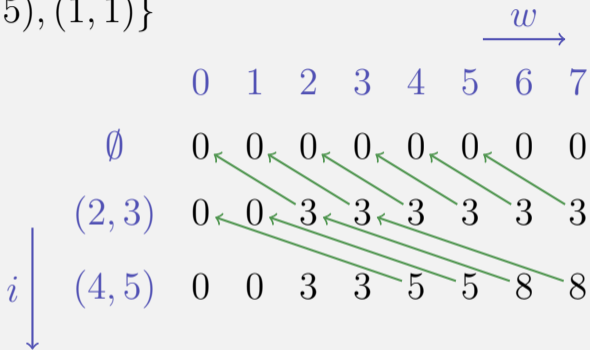
Beispiel

$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$



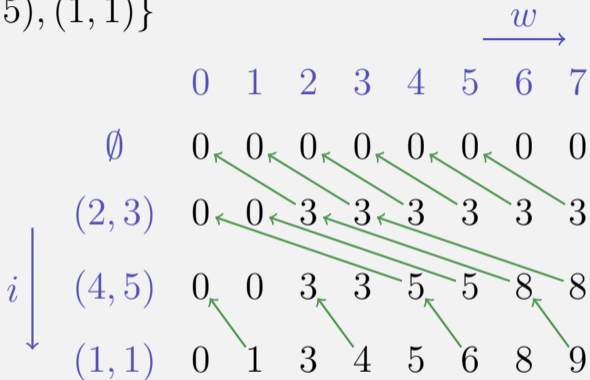
Beispiel

$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$



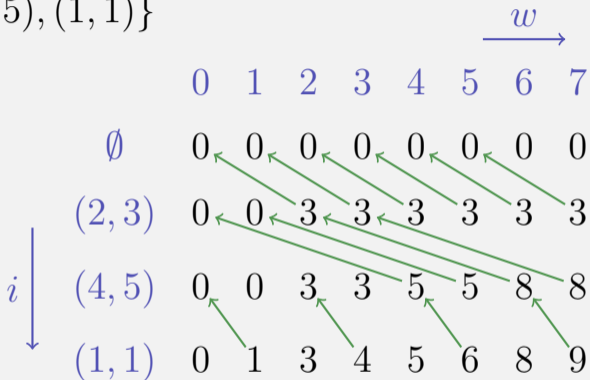
Beispiel

$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$



Beispiel

$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$



Auslesen der Lösung: wenn $t[i, w] = t[i - 1, w]$ dann Gegenstand i nicht benutzt und bei $t[i - 1, w]$ weiterfahren, andernfalls benutzt und bei $t[i - 1, s - w_i]$ weiterfahren.

Analyse

Die beiden Algorithmen für das Rucksackproblem haben eine Laufzeit in $\Theta(n \cdot W \cdot \sum_{i=1}^n v_i)$ (3d-Tabelle) und $\Theta(n \cdot W)$ (2d-Tabelle) und sind beide damit pseudopolynomiell, liefern aber das bestmögliche Resultat.

Der greedy Algorithmus ist sehr schnell, liefert aber unter Umständen beliebig schlechte Resultate.

Im folgenden beschäftigen wir uns mit einer Lösung dazwischen.

Approximation

Sei ein $\varepsilon \in (0, 1)$ gegeben. Sei I_{opt} eine bestmögliche Auswahl.
Suchen eine gültige Auswahl I mit

$$\sum_{i \in I} v_i \geq (1 - \varepsilon) \sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i.$$

Summe der Gewichte darf W natürlich in keinem Fall überschreiten.

Andere Formulierung des Algorithmus

Bisher: Gewichtsschranke $w \rightarrow$ maximaler Nutzen v

Umkehrung: Nutzen $v \rightarrow$ minimales Gewicht w

\Rightarrow Alternative Tabelle: $g[i, v]$ gibt das minimale Gewicht an, welches

- eine Auswahl der ersten i Gegenstände ($0 \leq i \leq n$) hat, die
- einen Nutzen von genau v aufweist ($0 \leq v \leq \sum_{i=1}^n v_i$).

Berechnung

Initial

- $g[0, 0] \leftarrow 0$
- $g[0, v] \leftarrow \infty$ (Nutzen v kann mit 0 Gegenständen nie erreicht werden.).

Berechnung

$$g[i, v] \leftarrow \begin{cases} g[i-1, v] & \text{falls } v < v_i \\ \min\{g[i-1, v], g[i-1, v-v_i] + w_i\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

aufsteigend nach i und für festes i aufsteigend nach v .

Lösung ist der grösste Index v mit $g[n, v] \leq w$.

Beispiel

$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

\xrightarrow{v}

$\downarrow i$

Beispiel

$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$

		\xrightarrow{v}									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\emptyset		0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

i
↓

Beispiel

$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	\emptyset	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	$(2, 3)$	0	∞	∞	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞

v →

i ↓

Beispiel

$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$

		\xrightarrow{v}									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i	\emptyset	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	$(2, 3)$	0	∞	∞	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	$(4, 5)$	0	∞	∞	2	∞	4	∞	∞	6	∞

Beispiel

$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$

		\xrightarrow{v}									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$i \downarrow$	\emptyset	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	(2, 3)	0	∞	∞	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	(4, 5)	0	∞	∞	2	∞	4	∞	∞	6	∞
	(1, 1)	0	1	∞	2	3	4	5	∞	6	7

Beispiel

$$E = \{(2, 3), (4, 5), (1, 1)\}$$

		v									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i	\emptyset	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	(2, 3)	0	∞	∞	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	(4, 5)	0	∞	∞	2	∞	4	∞	∞	6	∞
	(1, 1)	0	1	∞	2	3	4	5	∞	6	7

Auslesen der Lösung: wenn $g[i, v] = g[i - 1, v]$ dann Gegenstand i nicht benutzt und bei $g[i - 1, v]$ weiterfahren, andernfalls benutzt und bei $g[i - 1, b - v_i]$ weiterfahren.

Der Approximationstrick

Pseudopolynomielle Laufzeit wird polynomiell, wenn vorkommenden Werte in Polynom der Eingabelänge beschränkt werden können.

Sei $K > 0$ *geeignet* gewählt. Ersetze die Nutzwerte v_i durch “gerundete Werte” $\tilde{v}_i = \lfloor v_i/K \rfloor$ und erhalte eine neue Eingabe $E' = (w_i, \tilde{v}_i)_{i=1\dots n}$.

Wenden nun den Algorithmus auf Eingabe E' mit derselben Gewichtsschranke W an.

Idee

Beispiel $K = 5$

Eingabe Nutzwerte

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ..., 98, 99, 100

→

0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, ..., 19, 19, 20

Offensichtlich weniger unterschiedliche Nutzwerte

Eigenschaften des neuen Algorithmus

- Auswahl von Gegenständen aus E' ist genauso gültig wie die aus E . Gewicht unverändert!
- Laufzeit des Algorithmus ist beschränkt durch $\mathcal{O}(n^2 \cdot v_{\max}/K)$
($v_{\max} := \max\{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$)

Wie gut ist die Approximation?

Es gilt

$$v_i - K \leq K \cdot \left\lfloor \frac{v_i}{K} \right\rfloor = K \cdot \tilde{v}_i \leq v_i$$

Sei I'_{opt} eine optimale Lösung von E' . Damit

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in I_{opt}} v_i \right) - n \cdot K &\stackrel{|I_{opt}| \leq n}{\leq} \sum_{i \in I_{opt}} (v_i - K) \leq \sum_{i \in I_{opt}} (K \cdot \tilde{v}_i) = K \sum_{i \in I_{opt}} \tilde{v}_i \\ &\stackrel{I'_{opt} \text{ optimal}}{\leq} K \sum_{i \in I'_{opt}} \tilde{v}_i = \sum_{i \in I'_{opt}} K \cdot \tilde{v}_i \leq \sum_{i \in I'_{opt}} v_i. \end{aligned}$$

Wahl von K

Forderung:

$$\sum_{i \in I'} v_i \geq (1 - \varepsilon) \sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i.$$

Ungleichung von oben:

$$\sum_{i \in I'_{\text{opt}}} v_i \geq \left(\sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i \right) - n \cdot K$$

Also: $K = \varepsilon \frac{\sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i}{n}.$

Wahl von K

Wähle $K = \varepsilon \frac{\sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i}{n}$. Die optimale Summe ist aber unbekannt, daher wählen wir $K' = \varepsilon \frac{v_{\text{max}}}{n}$.²⁹

Es gilt $v_{\text{max}} \leq \sum_{i \in I_{\text{opt}}} v_i$ und somit $K' \leq K$ und die Approximation ist sogar etwas besser.

Die Laufzeit des Algorithmus ist beschränkt durch

$$\mathcal{O}(n^2 \cdot v_{\text{max}}/K') = \mathcal{O}(n^2 \cdot v_{\text{max}}/(\varepsilon \cdot v_{\text{max}}/n)) = \mathcal{O}(n^3/\varepsilon).$$

²⁹Wir können annehmen, dass vorgängig alle Gegenstände i mit $w_i > W$ entfernt wurden.

FPTAS

Solche Familie von Algorithmen nennt man *Approximationsschema*: die Wahl von ε steuert Laufzeit und Approximationsgüte.

Die Laufzeit $\mathcal{O}(n^3/\varepsilon)$ ist ein Polynom in n und in $\frac{1}{\varepsilon}$. Daher nennt man das Verfahren auch ein voll polynomielles Approximationsschema
FPTAS - Fully Polynomial Time Approximation Scheme

Optimale binäre Suchbäume

Gegeben: Suchwahrscheinlichkeiten p_i zu jedem Schlüssel k_i ($i = 1, \dots, n$) und q_i zu jedem Intervall d_i ($i = 0, \dots, n$) zwischen Suchschlüsseln eines binären Suchbaumes. $\sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=0}^n q_i = 1$.

Optimale binäre Suchbäume

Gegeben: Suchwahrscheinlichkeiten p_i zu jedem Schlüssel k_i ($i = 1, \dots, n$) und q_i zu jedem Intervall d_i ($i = 0, \dots, n$) zwischen Suchschlüsseln eines binären Suchbaumes. $\sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=0}^n q_i = 1$.

Gesucht: Optimaler Suchbaum T mit Schlüsseltiefen $\text{depth}(\cdot)$, welcher die erwarteten Suchkosten

$$\begin{aligned} C(T) &= \sum_{i=1}^n p_i \cdot (\text{depth}(k_i) + 1) + \sum_{i=0}^n q_i \cdot (\text{depth}(d_i) + 1) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n p_i \cdot \text{depth}(k_i) + \sum_{i=0}^n q_i \cdot \text{depth}(d_i) \end{aligned}$$

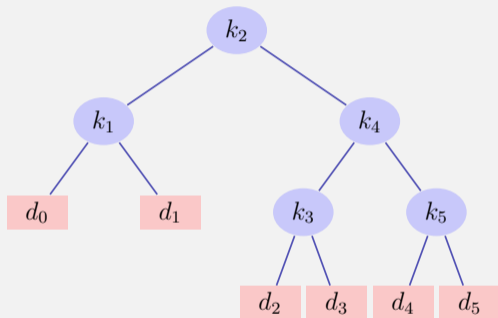
minimiert.

Beispiel

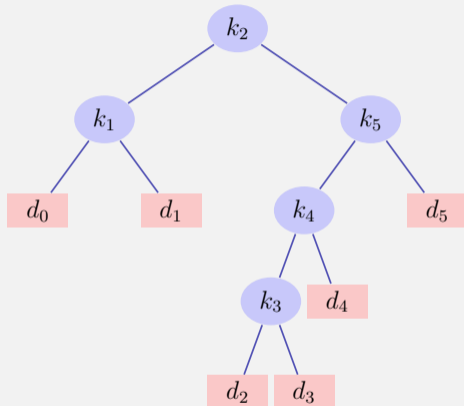
Erwartete Häufigkeiten

i	0	1	2	3	4	5
p_i		0.15	0.10	0.05	0.10	0.20
q_i	0.05	0.10	0.05	0.05	0.05	0.10

Beispiel



Suchbaum mit erwarteten
Kosten 2.8



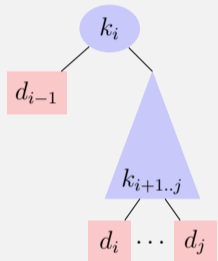
Suchbaum mit erwarteten
Kosten 2.75

Struktur eines optimalen Suchbaumes

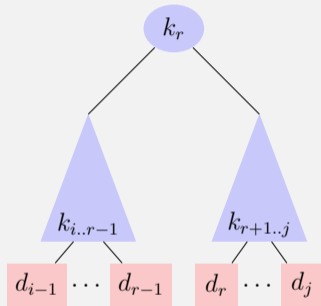
- Teilsuchbaum mit Schlüsseln k_i, \dots, k_j und Intervallschlüsseln d_{i-1}, \dots, d_j muss für das entsprechende Teilproblem optimal sein.³⁰
- Betrachten aller Teilsuchbäume mit Wurzel $k_r, i \leq r \leq j$ und optimalen Teilbäumen k_i, \dots, k_{r-1} und k_{r+1}, \dots, k_j

³⁰Das übliche Argument: wäre er nicht optimal, könnte er durch eine bessere Lösung ersetzt werden, welche die Gesamtlösung verbessert.

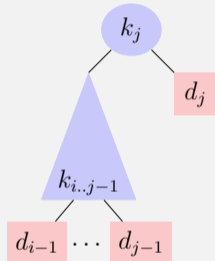
Teilsuchbäume



leerer linker
Teilsuchbaum



Teilsuchbäume links
und rechts nichtleer



leerer rechter
Teilsuchbaum

Erwartete Suchkosten

Sei $\text{depth}_T(k)$ die Tiefe des Knotens im Teilbaum T . Sei k_r die Wurzel eines Teilbaumes T_r und T_{L_r} und T_{R_r} der linke und rechte Teilbaum von T_r . Dann

$$\text{depth}_T(k_i) = \text{depth}_{T_{L_r}}(k_i) + 1, \quad (i < r)$$

$$\text{depth}_T(k_i) = \text{depth}_{T_{R_r}}(k_i) + 1, \quad (i > r)$$

Erwartete Suchkosten

Seien $e[i, j]$ die Kosten eines optimalen Suchbaumes mit Knoten k_i, \dots, k_j .

Basisfall: $e[i, i - 1]$, erwartete Suchkosten d_{i-1}

Sei $w(i, j) = \sum_{l=i}^j p_l + \sum_{l=i-1}^j q_l$.

Wenn k_r die Wurzel eines optimalen Teilbaumes mit Schlüsseln k_i, \dots, k_j , dann

$$e[i, j] = p_r + (e[i, r - 1] + w(i, r - 1)) + (e[r + 1, j] + w(r + 1, j))$$

mit $w(i, j) = w(i, r - 1) + p_r + w(r + 1, j)$:

$$e[i, j] = e[i, r - 1] + e[r + 1, j] + w(i, j).$$

Dynamic Programming

$$e[i, j] = \begin{cases} q_{i-1} & \text{falls } j = i - 1, \\ \min_{i \leq r \leq j} \{e[i, r - 1] + e[r + 1, j] + w[i, j]\} & \text{falls } i \leq j \end{cases}$$

Berechnung

Tabellen $e[1 \dots n + 1, 0 \dots n]$, $w[1 \dots n + 1, 0 \dots m]$, $r[1 \dots n, 1 \dots n]$

Initial

■ $e[i, i - 1] \leftarrow q_{i-1}$, $w[i, i - 1] \leftarrow q_{i-1}$ für alle $1 \leq i \leq n + 1$.

Berechnung

$$w[i, j] = w[i, j - 1] + p_j + q_j$$

$$e[i, j] = \min_{i \leq r \leq j} \{e[i, r - 1] + e[r + 1, j] + w[i, j]\}$$

$$r[i, j] = \arg \min_{i \leq r \leq j} \{e[i, r - 1] + e[r + 1, j] + w[i, j]\}$$

für Intervalle $[i, j]$ mit ansteigenden Längen $l = 1, \dots, n$, jeweils für $i = 1, \dots, n - l + 1$. Resultat steht in $e[1, n]$, Rekonstruktion via r .

Laufzeit $\Theta(n^3)$.

Beispiel

i	0	1	2	3	4	5
p_i		0.15	0.10	0.05	0.10	0.20
q_i	0.05	0.10	0.05	0.05	0.05	0.10

w

j						
0	0.05					
1	0.30	0.10				
2	0.45	0.25	0.05			
3	0.55	0.35	0.15	0.05		
4	0.70	0.50	0.30	0.20	0.05	
5	1.00	0.80	0.60	0.50	0.35	0.10
	1	2	3	4	5	6

e

j						
0	0.05					
1	0.45	0.10				
2	0.90	0.40	0.05			
3	1.25	0.70	0.25	0.05		
4	1.75	1.20	0.60	0.30	0.05	
5	2.75	2.00	1.30	0.90	0.50	0.10
	1	2	3	4	5	6

r

j					
1	1				
2	1	2			
3	2	2	3		
4	2	2	4	4	
5	2	4	5	5	5
	1	2	3	4	5