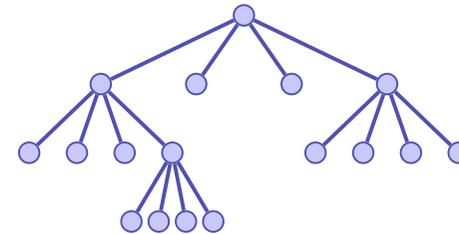


18. Quadrees

Quadrees, Bildsegmentierung, Funktionalminimierung, Reduktionsprinzip

Quadtree

Ein Quadtree ist ein Baum der Ordnung 4.



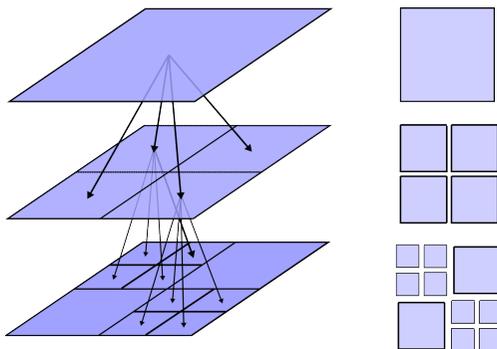
... und ist als solcher nicht besonders interessant, ausser man verwendet ihn zur...

473

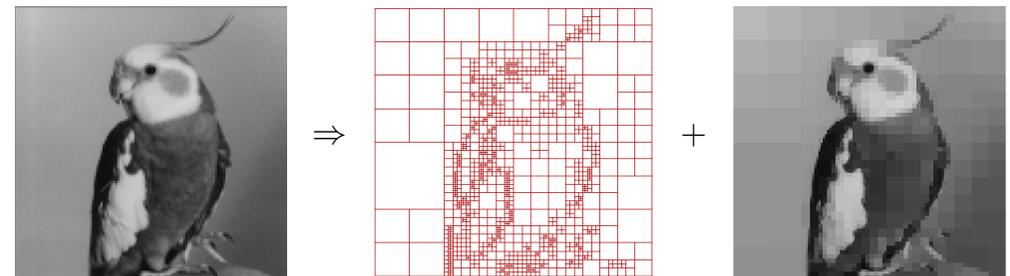
474

Quadtree - Interpretation und Nutzen

Partitionierung eines zweidimensionalen Bereiches in 4 gleich grosse Teile.



Bildsegmentierung

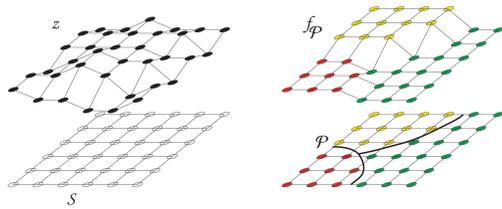


(Mögliche Anwendungen: Kompression, Entrauschen, Kantendetektion)

475

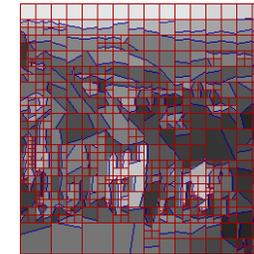
476

Etwas Notation



$S \subset \mathbb{Z}^2$ endliche rechteckige Indexmenge ('Pixel')
 $z \in \mathbb{R}^S$ Bild
 \mathfrak{P} Familie von Partitionen $\mathcal{P} \subset 2^S$ von S
 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_r)_{r \in S}$ Familie von 'Regressionsmodellen' $\mathcal{F}_r \subset \mathbb{R}^r$
 $f_{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}^S$ 'Approximation' mit $f_{\mathcal{P}}|_r \in \mathcal{F}_r, r \in \mathcal{P}$
 \mathfrak{S} Familie von Segmentierungen $(\mathcal{P}, f_{\mathcal{P}})$

Anderes Beispiel



z

$(\mathcal{P}, f_{\mathcal{P}})$

$f_{\mathcal{P}}$

\mathcal{P} : Quadrees mit zusätzlicher Unterteilung in Polygone ('Wedges'),
 $f_{\mathcal{P}}$: konstante Funktionen

477

478

Minimierungsproblem

\mathcal{P} Partition $\gamma \geq 0$ Regularisierungsparameter
 $f_{\mathcal{P}}$ Approximation z Bild = 'Daten'

Ziel: Effiziente Minimierung des Funktionals

$$H_{\gamma, z} : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathcal{P}, f_{\mathcal{P}}) \mapsto \gamma \cdot |\mathcal{P}| + \|z - f_{\mathcal{P}}\|_2^2.$$

Ergebnis $(\hat{\mathcal{P}}, \hat{f}_{\hat{\mathcal{P}}}) \in \operatorname{argmin}_{(\mathcal{P}, f_{\mathcal{P}})} H_{\gamma, z}$ interpretierbar als **optimaler Kompromiss zwischen Regularität und Datentreue**.

Warum Quadrees

$$H_{\gamma, z} : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathcal{P}, f_{\mathcal{P}}) \mapsto \gamma \cdot |\mathcal{P}| + \|z - f_{\mathcal{P}}\|_2^2.$$

- Anzahl aller Partitionierungen extrem gross ($|\mathfrak{P}| > 2^{|S|}$)
- Einsatz von Markov-Chain-Monte-Carlo (MCMC) Methoden zur Minimierung des Funktionals H über alle Partitionierung möglich, aber zeitaufwändig und inexakt.
- \Rightarrow Einschränkung des Suchraumes. Hierarchische Quadtree-Partitionierung besonders gut mit rekursivem Divide-And-Conquer Ansatz verträglich.²³

²³Wie Quicksort (nur 2d)!

479

480

Reduktionsprinzip

$$\begin{aligned} & \min_{(\mathcal{P}, f_{\mathcal{P}}) \in \mathcal{G}} \gamma |\mathcal{P}| + \|z - f_{\mathcal{P}}\|_2^2 \\ = & \min_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} \left\{ \gamma |\mathcal{P}| + \sum_{r \in \mathcal{P}} \min_{f_r \in \mathcal{F}_r} \sum_{s \in r} (z(s) - f_r(s))^2 \right\} \end{aligned}$$

⇒ Separation von Partitionssuche und lokaler Projektion.

Algorithmus: Minimize(z, r, γ)

Input : Bilddaten $z \in \mathbb{R}^S$, Rechteck $r \subset S$, Regularisierung $\gamma > 0$

Output : $\min_{(\mathcal{P}, f_{\mathcal{P}}) \in \mathcal{G}} \gamma |\mathcal{P}| + \|z - f_{\mathcal{P}}\|_2^2$

if $|r| = 0$ **then return** 0

$m \leftarrow \gamma + \min_{f_r \in \mathcal{F}_r} \sum_{s \in r} (z(s) - f_r(s))^2$

if $|r| > 1$ **then**

 Split r into $r_{ul}, r_{lr}, r_{ul}, r_{ur}$

$m_1 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ul})$

$m_2 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{lr})$

$m_3 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ul})$

$m_4 \leftarrow \text{Minimize}(z, r_{ur})$

$m' \leftarrow m_1 + m_2 + m_3 + m_4$

else

$m' \leftarrow \infty$

if $m' < m$ **then** $m \leftarrow m'$

return m

481

482

Konstante Funktionen

Minimiere

$$\min_{f_r \in \mathcal{F}_r} \sum_{s \in r} (z(s) - f_r(s))^2$$

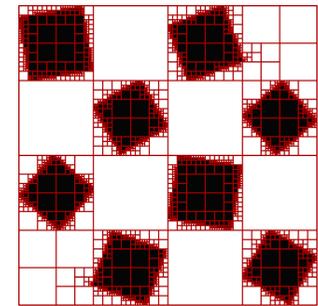
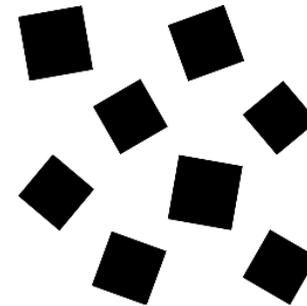
für die auf r konstanten Funktionen

Lösung: $\mu_r = \frac{1}{r} \sum_{s \in r} z(s)$

Schnelle Berechnung von μ_r auf Rechtecken möglich:

Präfixsummen!

Multiskalenansatz!



483

484

Allgemeine Regression

Betrachte Familie von $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $\varphi_i : S \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.

Ziel: Minimiere

$$\sum_{s \in r} \left(z_s - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(s) \right)^2$$

in $a \in \mathbb{R}^n$.

Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_{s \in r} z_s \varphi_j(s) &= \sum_{s \in r} \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(s) \varphi_j(s), 1 \leq j \leq n \\ \Leftrightarrow \sum_{s \in r} z_s \varphi_j(s) &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{s \in r} \varphi_i(s) \varphi_j(s), 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

485

Allgemeine Regression

Normalgleichungen in Matrixschreibweise:

$$Y = M \cdot a.$$

mit $a = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ und

$$Y := \left(\sum_{s \in r} z_s \varphi_j(s) \right)_{1 \leq j \leq n}, \quad M := \left(\sum_{s \in r} \varphi_i(s) \varphi_j(s) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

486

Allgemeine Regression

Sei \hat{a} eine Lösung obigen Gleichungssystems. Berechnung des Approximationsfehlers:

$$\begin{aligned} \min_{f_r \in \mathcal{F}_r} \sum_{s \in r} (z_s - f_r(s))^2 &= \sum_{s \in r} \left(z_s - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i \varphi_i(s) \right)^2 \\ &= \sum_{s \in r} z_s^2 - 2 \sum_{i=1}^n \hat{a}_i Y_i + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i^2 M_{ii}. \end{aligned}$$

487

Beispiel: Affine Funktionen

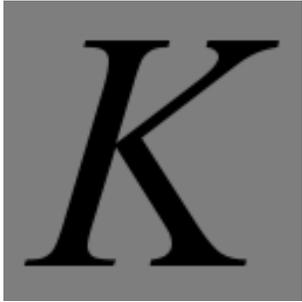
$n = 3$

- $\varphi_0(s) = 1$,
- $\varphi_1(s) = s_1$ (x -Koordinate von s),
- $\varphi_2(s) = s_2$ (y -Koordinate von s)

Regression: Übung!

488

Affine Regression



Effiziente lokale Berechnung

Benötigt: schnelle Berechnung der $\frac{n(n+1)}{2} + n$ 'Momente'

$$\sum_s \varphi_i(s)\varphi_j(s) \text{ und } \sum_{s \in r} z_s \varphi_j(s), 1 \leq i, j \leq n,$$

und für den Approximationsfehler

$$\sum_{s \in r} z_s^2.$$

Verwendung von Präfixsummen: Berechnung der lokalen Regression über Rechtecken in $\mathcal{O}(1)$.

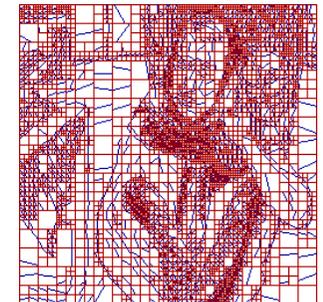
489

490

Analyse

Unter der Voraussetzung, dass die lokale Approximation in $\mathcal{O}(1)$ berechnet werden kann, benötigt der Minimierungsalgorithmus über dyadische Partitionen (Quadtree) $\mathcal{O}(|S| \log |S|)$ Schritte.

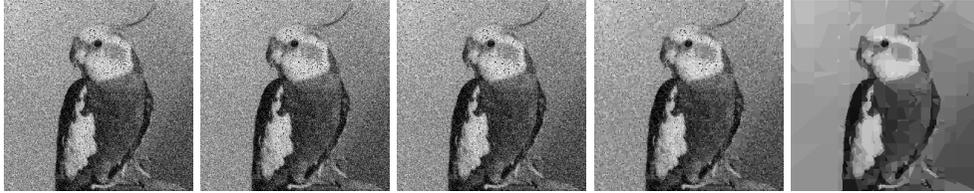
Affine Regression + Wedgelets



491

492

Entauschen



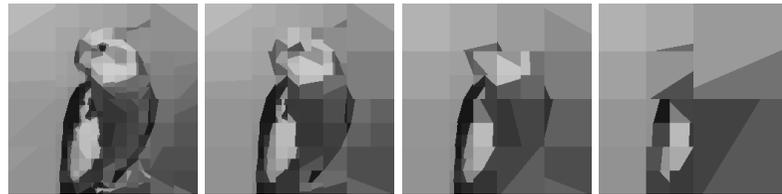
noised

$\gamma = 0.003$

$\gamma = 0.01$

$\gamma = 0.03$

$\gamma = 0.1$



$\gamma = 0.3$

$\gamma = 1$

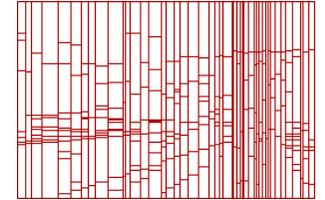
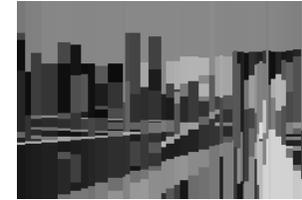
$\gamma = 3$

$\gamma = 10$

493

Andere Ideen

kein Quadtree: hierarchisch-eindimensionales Modell (benötigt Dynamic Programming)



494