16. Natürliche Suchbäume

[Ottman/Widmayer, Kap. 5.1, Cormen et al, Kap. 12.1 - 12.3]

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing:

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit.
Manche Operationen gar nicht unterstützt:

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit.
Manche Operationen gar nicht unterstützt:

- Aufzählen von Schlüssel in aufsteigender Anordnung

Wörterbuchimplementationen

Hashing: Implementierung von Wörterbüchern mit erwartet sehr schnellen Zugriffszeiten.

Nachteile von Hashing: im schlechtesten Fall lineare Zugriffszeit.
Manche Operationen gar nicht unterstützt:

- Aufzählen von Schlüssel in aufsteigender Anordnung
- Nächst kleinerer Schlüssel zu gegebenem Schlüssel

Bäume

Bäume sind

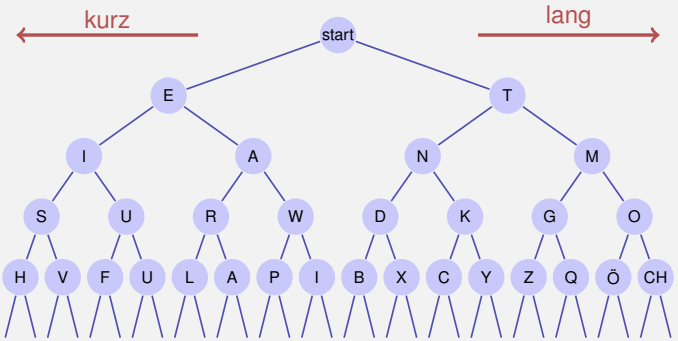
- Verallgemeinerte Listen: Knoten können mehrere Nachfolger haben
- Spezielle Graphen: Graphen bestehen aus Knoten und Kanten. Ein Baum ist ein zusammenhängender, gerichteter, azyklischer Graph.

Bäume

Verwendung

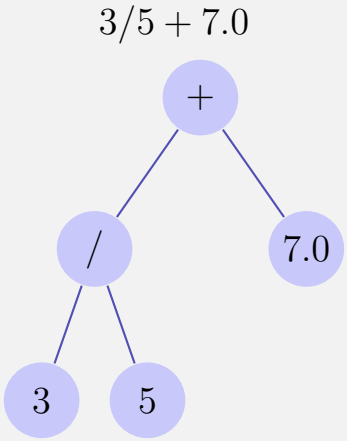
- Entscheidungsbäume: Hierarchische Darstellung von Entscheidungsregeln
- Syntaxbäume: Parsen und Traversieren von Ausdrücken, z.B. in einem Compiler
- Codebäume: Darstellung eines Codes, z.B. Morsealphabet, Huffmann Code
- Suchbäume: ermöglichen effizientes Suchen eines Elementes

Beispiele



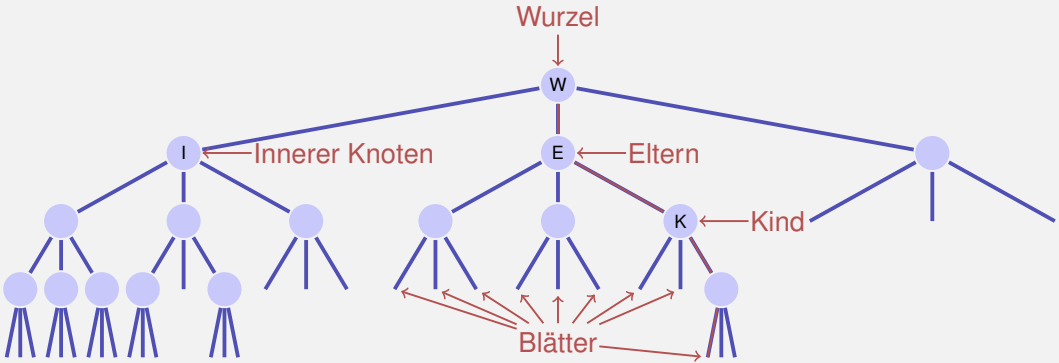
Morsealphabet

Beispiele



Ausdrucksbaum

Nomenklatur



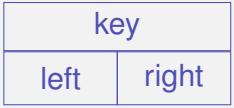
- Ordnung des Baumes: Maximale Anzahl Kindknoten, hier: 3
- Höhe des Baumes: maximale Pfadlänge Wurzel – Blatt (hier: 4)

Binäre Bäume

Ein binärer Baum ist entweder

- ein Blatt, d.h. ein leerer Baum, oder
- ein innerer Knoten mit zwei Bäumen T_l (linker Teilbaum) und T_r (rechter Teilbaum) als linken und rechten Nachfolger.

In jedem Knoten v speichern wir

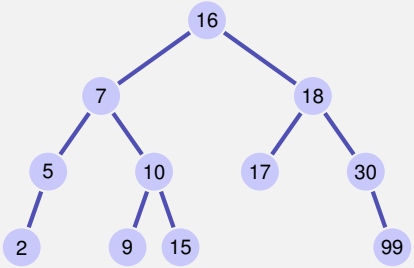


- einen Schlüssel $v.\mathrm{key}$ und
- zwei Zeiger $v.\mathrm{left}$ und $v.\mathrm{right}$ auf die Wurzeln der linken und rechten Teilbäume.
- Ein Blatt wird durch den **null**-Zeiger repräsentiert

Binärer Suchbaum

Ein binärer Suchbaum ist ein binärer Baum, der die Suchbaumeigenschaft erfüllt:

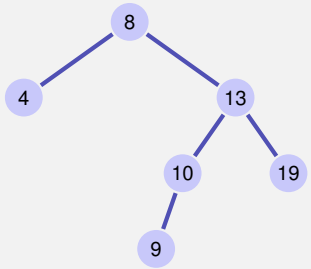
- Jeder Knoten v speichert einen Schlüssel
- Schlüssel im linken Teilbaum $v.\mathrm{left}$ von v sind kleiner als $v.\mathrm{key}$
- Schlüssel im rechten Teilbaum $v.\mathrm{right}$ von v sind grösser als $v.\mathrm{key}$



Suchen

Input : Binärer Suchbaum mit Wurzel r,
Schlüssel k
Output : Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

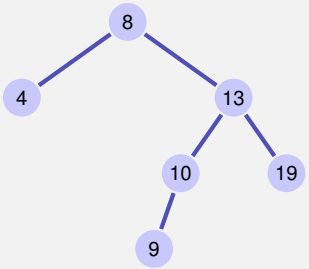
$v \leftarrow r$
while $v \neq$ **null do**
    if $k = v.\text{key}$ **then**
        return v
    else if $k < v.\text{key}$ **then**
        $v \leftarrow v.\text{left}$
    else
        $v \leftarrow v.\text{right}$
return null



Suchen

Input : Binärer Suchbaum mit Wurzel r,
Schlüssel k
Output : Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

$v \leftarrow r$
while $v \neq$ **null do**
    if $k = v.\text{key}$ **then**
        return v
    else if $k < v.\text{key}$ **then**
        $v \leftarrow v.\text{left}$
    else
        $v \leftarrow v.\text{right}$
return null

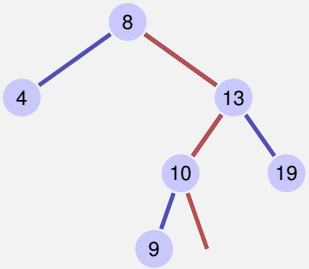


Search (12)

Suchen

Input : Binärer Suchbaum mit Wurzel r,
Schlüssel k
Output : Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

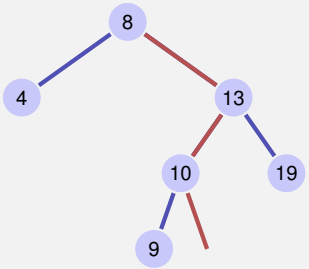
$v \leftarrow r$
while $v \neq$ **null do**
    if $k = v.\text{key}$ **then**
        return v
    else if $k < v.\text{key}$ **then**
        $v \leftarrow v.\text{left}$
    else
        $v \leftarrow v.\text{right}$
return null



Suchen

Input : Binärer Suchbaum mit Wurzel r,
Schlüssel k
Output : Knoten v mit $v.\text{key} = k$ oder **null**

$v \leftarrow r$
while $v \neq$ **null do**
    if $k = v.\text{key}$ **then**
        return v
    else if $k < v.\text{key}$ **then**
        $v \leftarrow v.\text{left}$
    else
        $v \leftarrow v.\text{right}$
return null



Search (12) → **null**

Höhe eines Baumes

Die Höhe $h(T)$ eines Baumes T mit Wurzel r ist gegeben als

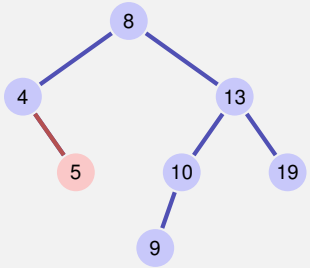
$$h(r) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r = \textbf{null} \\ 1 + \max\{h(r.\text{left}), h(r.\text{right})\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Laufzeit der Suche ist somit im schlechtesten Fall $\mathcal{O}(h(T))$

Einfügen eines Schlüssels

Einfügen des Schlüssels k

- Suche nach k.
- Wenn erfolgreich: Fehlerausgabe
- Wenn erfolglos: Einfügen des Schlüssels am erreichten Blatt.



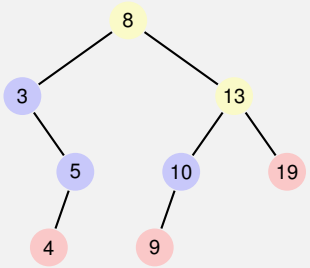
Insert (5)

Knoten entfernen

Drei Fälle möglich

- Knoten hat keine Kinder
- Knoten hat ein Kind
- Knoten hat zwei Kinder

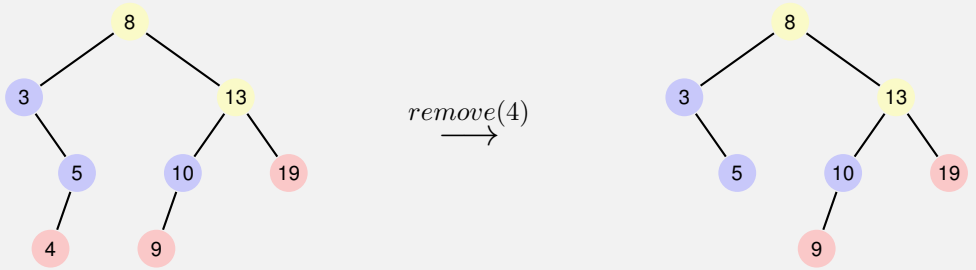
[Blätter zählen hier nicht]



Knoten entfernen

Knoten hat keine Kinder

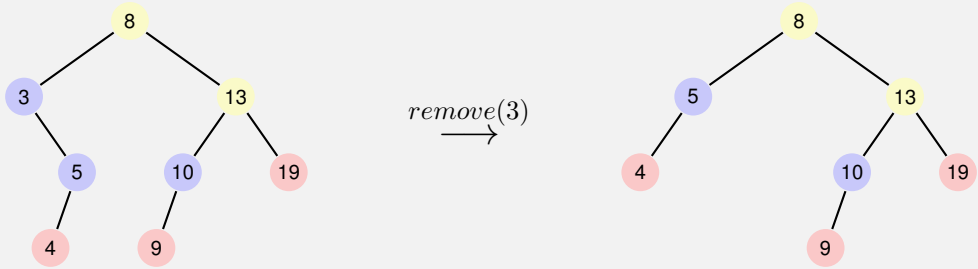
Einfacher Fall: Knoten durch Blatt ersetzen.



Knoten entfernen

Knoten hat ein Kind

Auch einfach: Knoten durch das einzige Kind ersetzen.



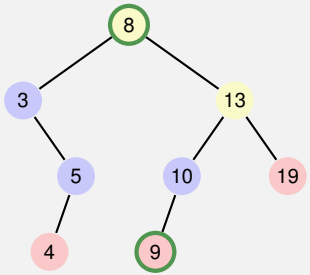
Knoten entfernen

Knoten v hat zwei Kinder

Beobachtung: Der kleinste Schlüssel im rechten Teilbaum $v.\mathrm{right}$ (der *symmetrische Nachfolger* von v)

- ist kleiner als alle Schlüssel in $v.\mathrm{right}$
- ist grösser als alle Schlüssel in $v.\mathrm{left}$
- und hat kein linkes Kind.

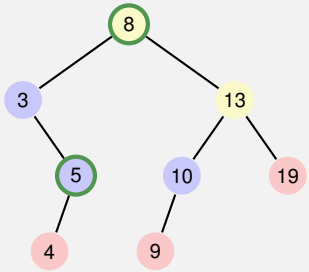
Lösung: ersetze v durch seinen symmetrischen Nachfolger



Aus Symmetriegründen...

Knoten v hat zwei Kinder

Auch möglich: ersetze v durch seinen symmetrischen Vorgänger



Algorithmus SymmetricSuccessor(v)

Input : Knoten v eines binären Suchbaumes
Output : Symmetrischer Nachfolger von v
$w \leftarrow v.\text{right}$
$x \leftarrow w.\text{left}$
while $x \neq$ **null do**
    $w \leftarrow x$
    $x \leftarrow x.\text{left}$
return w

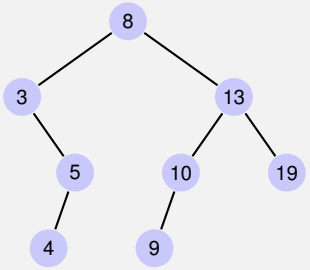
Analyse

Löschen eines Elementes v aus einem Baum T benötigt $\mathcal{O}(h(T))$ Elementarschritte:

- Suchen von v hat Kosten $\mathcal{O}(h(T))$
- Hat v maximal ein Kind ungleich **null**, dann benötigt das Entfernen $\mathcal{O}(1)$
- Das Suchen des symmetrischen Nachfolgers n benötigt $\mathcal{O}(h(T))$ Schritte. Entfernen und Einfügen von n hat Kosten $\mathcal{O}(1)$

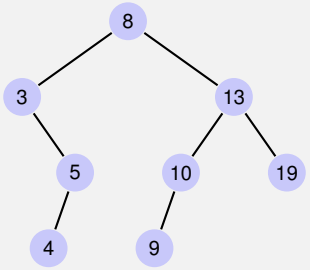
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.



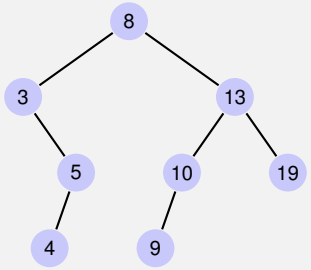
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19



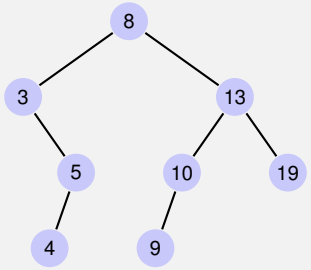
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- Nebenreihenfolge (postorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v.



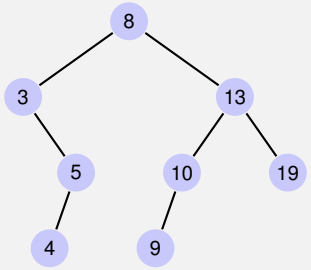
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- Nebenreihenfolge (postorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v.
  4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8



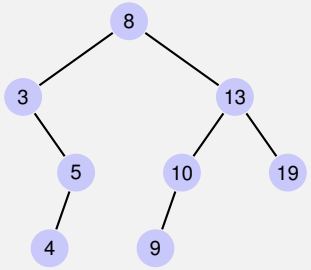
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- Nebenreihenfolge (postorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v.
  4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8
- Symmetrische Reihenfolge (inorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann v, dann $T_{\text{right}}(v)$.



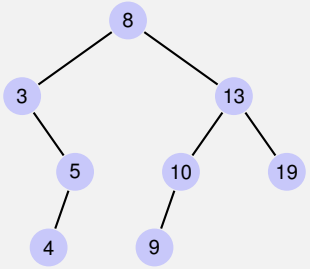
Traversierungsarten

- Hauptreihenfolge (preorder): v, dann $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  8, 3, 5, 4, 13, 10, 9, 19
- Nebenreihenfolge (postorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann $T_{\text{right}}(v)$, dann v.
  4, 5, 3, 9, 10, 19, 13, 8
- Symmetrische Reihenfolge (inorder): $T_{\text{left}}(v)$, dann v, dann $T_{\text{right}}(v)$.
  3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 19

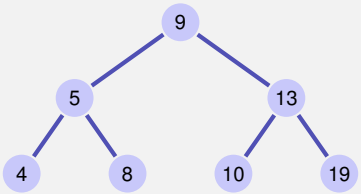


Weitere unterstützte Operationen

- Min(T): Auslesen des Minimums in $\mathcal{O}(h)$
- ExtractMin(T): Auslesen und Entfernen des Minimums in $\mathcal{O}(h)$
- List(T): Ausgeben einer sortierten Liste der Elemente von T
- Join(T_1, T_2): Zusammenfügen zweier Bäume mit $\max(T_1) < \min(T_2)$ in $\mathcal{O}(n)$.

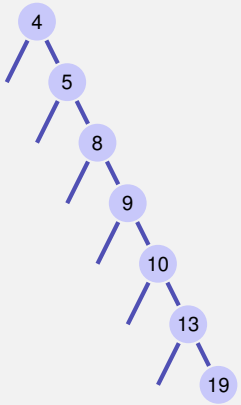


Degenerierte Suchbäume



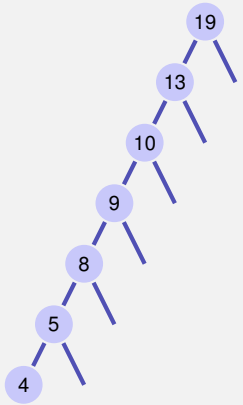
Insert 9,5,13,4,8,10,19

bestmöglich balanciert



Insert 4,5,8,9,10,13,19

Lineare Liste



Insert 19,13,10,9,8,5,4

Lineare Liste

17. AVL Bäume

Balancierte Bäume [Ottman/Widmayer, Kap. 5.2-5.2.1, Cormen et al, Kap. Problem 13-3]

Ziel

Suchen, Einfügen und Entfernen eines Schlüssels in Baum mit n Schlüsseln, welche in zufälliger Reihenfolge eingefügt wurden im Mittel in $\mathcal{O}(\log_2 n)$ Schritten.

Schlechtester Fall jedoch: $\Theta(n)$ (degenerierter Baum).

Ziel: Verhinderung der Degenerierung. Künstliches, bei jeder Update-Operation erfolgtes Balancieren eines Baumes

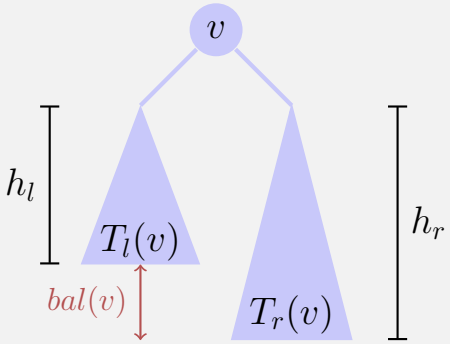
Balancierung: garantiere, dass ein Baum mit n Knoten stehts eine Höhe von $\mathcal{O}(\log n)$ hat.

Adelson-Venskii und Landis (1962): AVL-Bäume

Balance eines Knotens

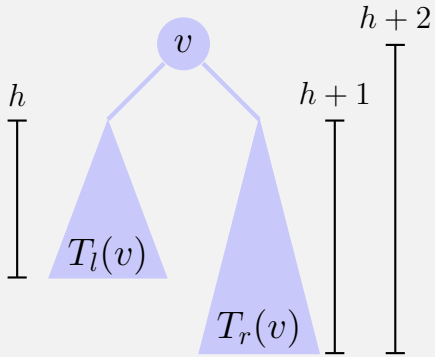
Die *Balance* eines Knotens v ist definiert als die Höhendifferenz seiner beiden Teilbäume $T_l(v)$ und $T_r(v)$

$$\mathrm{bal}(v) := h(T_r(v)) - h(T_l(v))$$

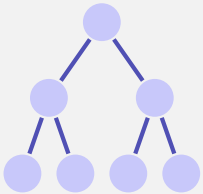


AVL Bedingung

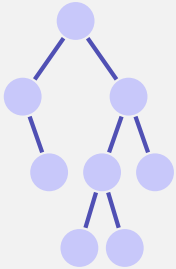
AVL Bedingung: für jeden Knoten v eines Baumes gilt $\mathrm{bal}(v) \in \{-1, 0, 1\}$



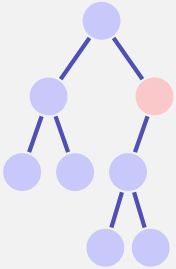
(Gegen-)Beispiele



AVL Baum der Höhe 2



AVL Baum der Höhe 3



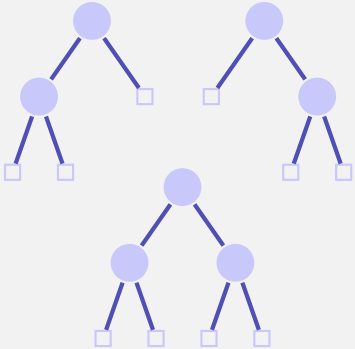
Kein AVL Baum

Anzahl Blätter

- 1. Beobachtung: Ein Suchbaum mit n Schlüsseln hat genau $n + 1$ Blätter. Einfaches Induktionsargument.
- 2. Beobachtung: untere Grenze für Anzahl Blätter eines Suchbaums zu gegebener Höhe erlaubt Abschätzung der maximalen Höhe eines Suchbaums zu gegebener Anzahl Schlüssel.

Untere Grenze Blätter

AVL Baum der Höhe 1 hat $M(1) := 2$ Blätter



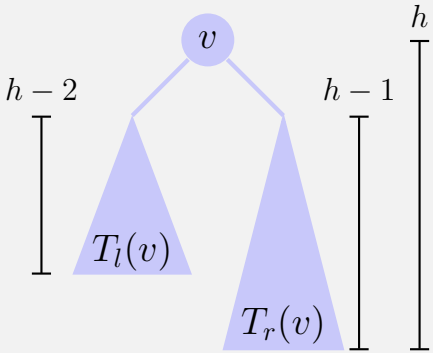
AVL Baum der Höhe 2 hat mindestens $M(2) := 3$ Blätter

Untere Grenze Blätter für $h > 2$

- Höhe eines Teilbaums $\geq h - 1$.
- Höhe des anderen Teilbaums $\geq h - 2$.

Minimale Anzahl Blätter $M(h)$ ist

$$M(h) = M(h-1) + M(h-2)$$



Insgesamt gilt $M(h) = F_{h+2}$ mit *Fibonacci-Zahlen* $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 1$.

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

Geschlossene Form der Fibonacci Zahlen: Berechnung über erzeugende Funktionen:

1. Potenzreihenansatz

$$f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} F_i \cdot x^i$$

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

2. Für Fibonacci Zahlen gilt $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}\ \forall i > 1$. Daher:

$$
\begin{aligned}
f(x) = x + \sum_{i=2}^{\infty} F_i \cdot x^i &= x + \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-1} \cdot x^i + \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-2} \cdot x^i \\
&= x + x \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-1} \cdot x^{i-1} + x^2 \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-2} \cdot x^{i-2} \\
&= x + x \sum_{i=0}^{\infty} F_i \cdot x^i + x^2 \sum_{i=0}^{\infty} F_i \cdot x^i \\
&= x + x \cdot f(x) + x^2 \cdot f(x).
\end{aligned}
$$

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

3. Damit:

$$
\begin{aligned}
& f(x) \cdot (1 - x - x^2) = x. \\
\Leftrightarrow \quad & f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & f(x) = \frac{x}{(1 - \phi x) \cdot (1 - \hat{\phi} x)}
\end{aligned}
$$

mit den Wurzeln ϕ und $\hat{\phi}$ von $1 - x - x^2$.

$$
\begin{aligned}
\phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\
\hat{\phi} &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}
$$

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

4. Es gilt:

$$(1 - \hat{\phi}x) - (1 - \phi x) = \sqrt{5} \cdot x.$$

Damit:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1 - \hat{\phi}x) - (1 - \phi x)}{(1 - \phi x) \cdot (1 - \hat{\phi}x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi x} - \frac{1}{1 - \hat{\phi}x} \right) \end{aligned}$$

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

5 Potenzreihenentwicklung von $g_a(x) = \frac{1}{1-a\cdot x}$ ($a \in \mathbb{R}$):

$$\frac{1}{1-a\cdot x} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \cdot x^i.$$

Sieht man mit Taylor-Entwicklung von $g_a(x)$ um $x = 0$ oder so: Sei $\sum_{i=0}^{\infty} G_i \cdot x^i$ eine Potenzreihenentwicklung von g. Mit der Identität $g_a(x)(1 - a \cdot x) = 1$ gilt

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \cdot x^i - a \cdot \sum_{i=0}^{\infty} G_i \cdot x^{i+1} = G_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (G_i - a \cdot G_{i-1}) \cdot x^i$$

Also $G_0 = 1$ und $G_i = a \cdot G_{i-1} \Rightarrow G_i = a^i$.

[Fibonacci Zahlen: geschlossene Form]

6. Einsetzen der Potenzreihenentwicklung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi x} - \frac{1}{1-\hat{\phi}x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\phi^i x^i - \sum_{i=0}^{\infty}\hat{\phi}^i x^i\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i)x^i$$

Koeffizientenvergleich mit $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \cdot x^i$ liefert

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i).$$

Fibonacci Zahlen

Es gilt $F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i)$ mit den Wurzeln ϕ, $\hat{\phi}$ der Gleichung $x^2 = x + 1$ (goldener Schnitt), also $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Beweis (Induktion). Klar für $i = 0, i = 1$. Sei $i > 2$:

$$
\begin{aligned}
F_i = F_{i-1} + F_{i-2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-1} - \hat{\phi}^{i-1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-2} - \hat{\phi}^{i-2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{i-1} + \phi^{i-2}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{\phi}^{i-1} + \hat{\phi}^{i-2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{i-2}(\phi + 1) - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\phi}^{i-2}(\hat{\phi} + 1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{i-2}(\phi^2) - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\phi}^{i-2}(\hat{\phi}^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^i - \hat{\phi}^i).
\end{aligned}
$$

Baumhöhe

Da $\hat{\phi} < 1$, gilt insgesamt

$$M(h) \in \Theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^h\right) \subseteq \Omega(1.618^h)$$

und somit

$$h \leq 1.44 \log_2 n + c.$$

AVL Baum ist asymptotisch nicht mehr als 44% höher als ein perfekt balancierter Baum.

Einfügen

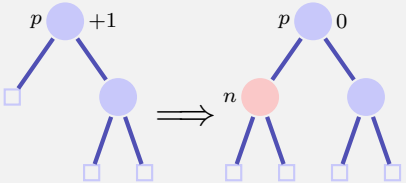
Balancieren

- Speichern der Balance für jeden Knoten
- Baum Re-balancieren bei jeder Update-Operation

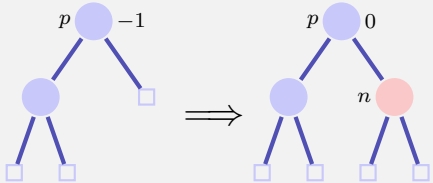
Neuer Knoten n wird eingefügt:

- Zuerst einfügen wie bei Suchbaum.
- Prüfe die Balance-Bedingung für alle Knoten aufsteigend von n zur Wurzel.

Balance am Einfügeort



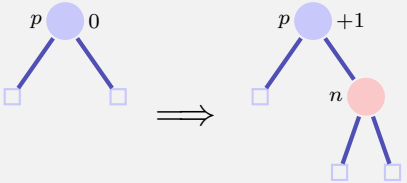
Fall 1: $\mathrm{bal}(p) = +1$



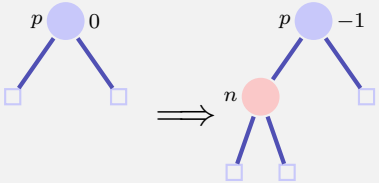
Fall 2: $\mathrm{bal}(p) = -1$

Fertig in beiden Fällen, denn der Teilbaum ist nicht gewachsen.

Balance am Einfügeort



Fall 3.1: $\mathrm{bal}(p) = 0$ rechts



Fall 3.2: $\mathrm{bal}(p) = 0$, links

In beiden Fällen noch nicht fertig. Aufruf von `upin(p)`.

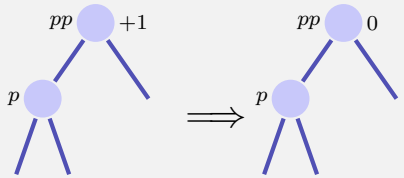
upin(p) - Invariante

Beim Aufruf von `upin(p)` gilt, dass

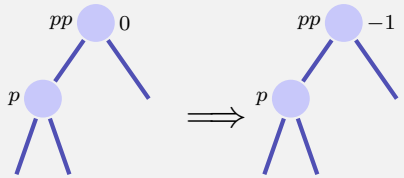
- der Teilbaum ab p gewachsen ist und
- $\mathrm{bal}(p) \in \{-1, +1\}$

upin(p)

Annahme: p ist linker Sohn von pp[17]



Fall 1: $\mathrm{bal}(pp) = +1$, fertig.



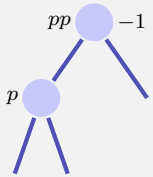
Fall 2: $\mathrm{bal}(pp) = 0$, `upin(pp)`

In beiden Fällen gilt nach der Operation die AVL-Bedingung für den Teilbaum ab pp

[17] Ist p rechter Sohn: symmetrische Fälle unter Vertauschung von $+1$ und -1

upin(p)

Annahme: p ist linker Sohn von pp



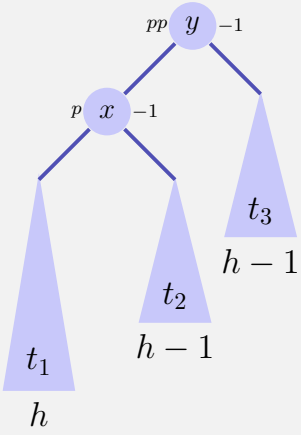
Fall 3: $\mathrm{bal}(pp) = -1$,

Dieser Fall ist problematisch: das Hinzufügen von n im Teilbaum ab pp hat die AVL-Bedingung verletzt. Rebalancieren!

Zwei Fälle $\mathrm{bal}(p) = -1$, $\mathrm{bal}(p) = +1$

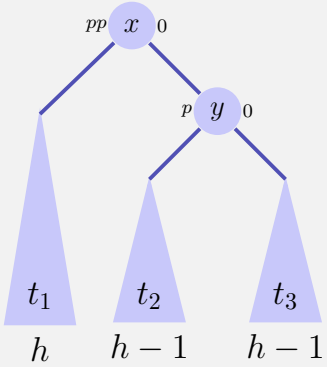
Rotationen

Fall 1.1 $\mathrm{bal}(p) = -1$. [18]



$\Longrightarrow$

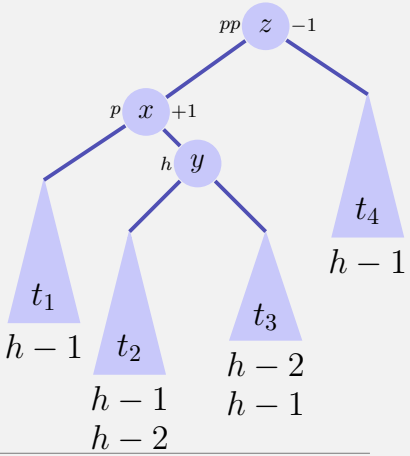
Rotation nach rechts



[18] p rechter Sohn: $\mathrm{bal}(pp) = \mathrm{bal}(p) = +1$, Linksrotation

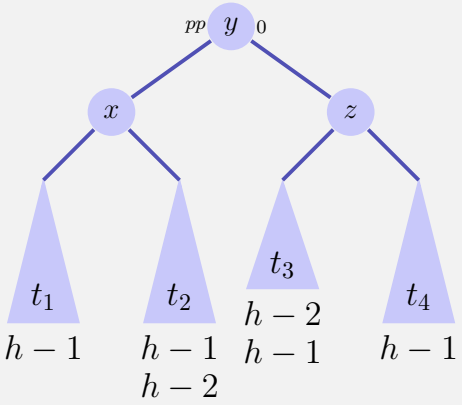
Rotationen

Fall 1.2 $\mathrm{bal}(p) = +1$. [19]



$\Longrightarrow$

Doppel-
rotation
links-
rechts



[19] p rechter Sohn: $\mathrm{bal}(pp) = +1$, $\mathrm{bal}(p) = -1$, Doppelrotation rechts links

Analyse

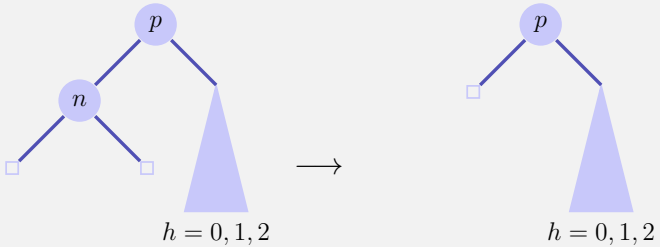
- Höhe des Baumes: $\mathcal{O}(\log n)$.
- Einfügen wie beim binären Suchbaum.
- Balancieren durch Rekursion vom Knoten zur Wurzel. Maximale Pfadlänge $\mathcal{O}(\log n)$.

Das Einfügen im AVL-Baum hat Laufzeitkosten von $\mathcal{O}(\log n)$.

Löschen

Fall 1: Knoten n hat zwei Blätter als Kinder Sei p Elternknoten von n.
$\Rightarrow$ Anderer Teilbaum hat Höhe $h' = 0$, 1 oder 2

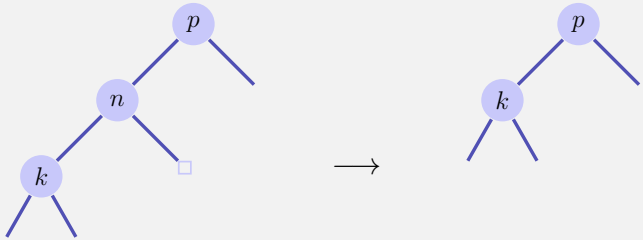
- $h' = 1$: $\mathrm{bal}(p)$ anpassen.
- $h' = 0$: $\mathrm{bal}(p)$ anpassen. Aufruf `upout(p)`.
- $h' = 2$: Rebalancieren des Teilbaumes. Aufruf `upout(p)`.



Löschen

Fall 2: Knoten n hat einen inneren Knoten k als Kind

- Ersetze n durch k. `upout(k)`



Löschen

Fall 3: Knoten n hat zwei inneren Knoten als Kinder

- Ersetze n durch symmetrischen Nachfolger. `upout(k)`
- Löschen des symmetrischen Nachfolgers wie in Fall 1 oder 2.

upout(p)

Sei pp der Elternknoten von p

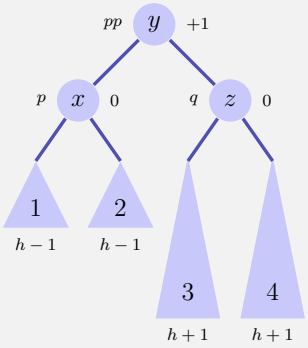
(a) p linkes Kind von pp

1. $\mathrm{bal}(pp) = -1 \Rightarrow \mathrm{bal}(pp) \leftarrow 0$. `upout(pp)`
2. $\mathrm{bal}(pp) = 0 \Rightarrow \mathrm{bal}(pp) \leftarrow +1$.
3. $\mathrm{bal}(pp) = +1 \Rightarrow$ nächste Folien.

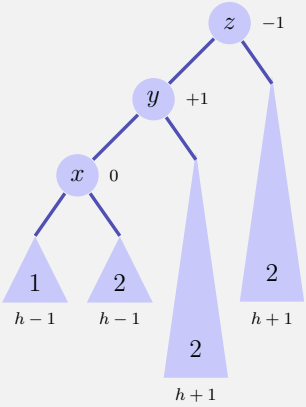
(b) p rechtes Kind von pp: Symmetrische Fälle unter Vertauschung von $+1$ und -1.

upout(p)

Fall (a).3: $\mathrm{bal}(pp) = +1$. Sei q Bruder von p
(a).3.1: $\mathrm{bal}(q) = 0$.[20]



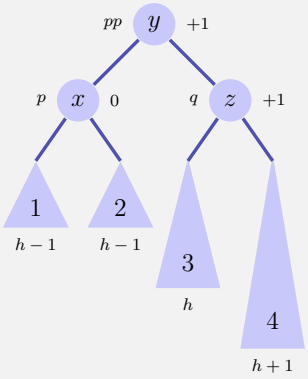
$\Longrightarrow$
Linksrotation
(y)



[20] (b).3.1: $\mathrm{bal}(pp) = -1$, $\mathrm{bal}(q) = -1$, Rechtsrotation.

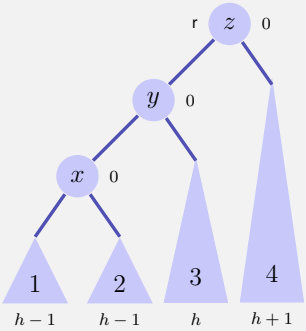
upout(p)

Fall (a).3: $\mathrm{bal}(pp) = +1$. (a).3.2: $\mathrm{bal}(q) = +1$.[21]



$\Longrightarrow$

Linksrotation
(y)

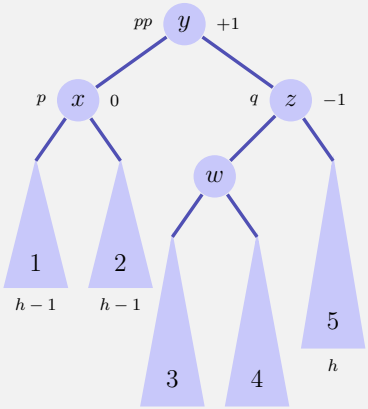


plus `upout(r)`.

[21] (b).3.2: $\mathrm{bal}(pp) = -1$, $\mathrm{bal}(q) = +1$, Rechtsrotation+upout

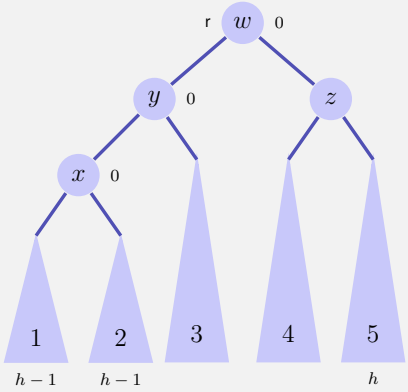
upout(p)

Fall (a).3: $\mathrm{bal}(pp) = +1$. (a).3.3: $\mathrm{bal}(q) = -1$.[22]



$\Longrightarrow$

Doppelrotation
rechts (z)
links (y)



plus `upout(r)`.

[22] (b).3.3: $\mathrm{bal}(pp) = -1$, $\mathrm{bal}(q) = -1$, Links-Rechts-Rotation + upout

Zusammenfassung

- AVL-Bäume haben asymptotische Laufzeit von $\mathcal{O}(\log n)$ (schlechtester Fall) für das Suchen, Einfügen und Löschen von Schlüsseln
- Einfügen und Löschen ist verhältnismässig aufwändig und für kleine Probleme relativ langsam.