Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung am D-Math (CSE) der ETH Zürich

Felix Friedrich

FS 2017

Willkommen!

Vorlesungshomepage:

`http://lec.inf.ethz.ch/DA/2017`

Das Team:

Assistenten	Alexander Pilz
	Daniel Hupp
	Lukas Humbel
Dozent	Felix Friedrich

1. Einführung

Algorithmen und Datenstrukturen, drei Beispiele

Ziele der Vorlesung

- Verständnis des Entwurfs und der Analyse grundlegender Algorithmen und Datenstrukturen.
- Vertiefter Einblick in ein modernes Programmiermodell (mit C++).
- Wissen um Chancen, Probleme und Grenzen des parallelen und nebenläufigen Programmierens.

Ziele der Vorlesung

Einerseits

- Unverzichtbares Grundlagenwissen aus der Informatik.

Andererseits

- Vorbereitung für Ihr weiteres Studium und die Praxis.

Inhalte der Vorlesung

Datenstrukturen / Algorithmen

Begriff der Invariante, Kostenmodell, Landau Symbole
Algorithmenentwurf, Induktion
Suchen und Auswahl, Sortieren
Dynamic Programming
Wörterbücher: Hashing und Suchbäume, AVL
Graphen, Kürzeste Wege, Backtracking, Flow
Geometrische Algorithmen, High Performance LA
Randomisierte Algorithmen (Gibbs/SA), Multiskalen
Sortiernetzwerke, parallele Algorithmen

Programmieren mit C++

RAII, Move Konstruktion, Smart Pointers,
Templates und Generische Programmierung
Exceptions
Funktoren und Lambdas
Constexpr, user defined literals
Threads, Mutexs and Monitors
Promises and Futures

Parallel Programming

Parallelität vs. Concurrency, Speedup (Amdahl/-Gustavson), Races, Memory Reordering, Atomic Registers, RMW (CAS,TAS), Deadlock/Starvation

Literatur

Algorithmen und Datenstrukturen, *T. Ottmann, P. Widmayer*, Spektrum-Verlag, 5. Auflage, 2011

Algorithmen - Eine Einführung, *T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein*, Oldenbourg, 2010

Introduction to Algorithms, *T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein* , 3rd ed., MIT Press, 2009

The C++ Programming Language, *B. Stroustrup*, 4th ed., Addison-Wesley, 2013.

The Art of Multiprocessor Programming, *M. Herlihy, N. Shavit*, Elsevier, 2012.

1.2 Algorithmen

[Cormen et al, Kap. 1;Ottman/Widmayer, Kap. 1.1]

Algorithmus

Algorithmus: wohldefinierte Berechnungsvorschrift, welche aus Eingabedaten (*input*) Ausgabedaten (*output*) berechnet.

Beispielproblem

Input : Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Beispielproblem

Input : Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \dots, a_n)$
Output : Eine Permutation $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ der Folge $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$

Beispielproblem

Input : Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Output : Eine Permutation $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ der Folge $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$

Mögliche Eingaben

$(1, 7, 3)$, $(15, 13, 12, -0.5)$, (1) $\ldots$

Beispielproblem

Input : Eine Folge von n Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Output : Eine Permutation $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ der Folge $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$

Mögliche Eingaben

$(1, 7, 3)$, $(15, 13, 12, -0.5)$, (1) ...

Jedes Beispiel erzeugt eine *Probleminstanz*.

Beispiele für Probleme in der Algorithmik

- Routenplanung: Shortest Path

Beispiele für Probleme in der Algorithmik

- Routenplanung: Shortest Path
- Kryptographie / Digitale Signaturen

Beispiele für Probleme in der Algorithmik

- Routenplanung: Shortest Path
- Kryptographie / Digitale Signaturen
- Stundenpläne / Arbeitspläne: Linear Programming

Beispiele für Probleme in der Algorithmik

- Routenplanung: Shortest Path
- Kryptographie / Digitale Signaturen
- Stundenpläne / Arbeitspläne: Linear Programming
- DNA Matching: Dynamic Programming

Beispiele für Probleme in der Algorithmik

- Routenplanung: Shortest Path
- Kryptographie / Digitale Signaturen
- Stundenpläne / Arbeitspläne: Linear Programming
- DNA Matching: Dynamic Programming
- Fabrikationspipeline: Topologische Sortierung

Beispiele für Probleme in der Algorithmik

- Routenplanung: Shortest Path
- Kryptographie / Digitale Signaturen
- Stundenpläne / Arbeitspläne: Linear Programming
- DNA Matching: Dynamic Programming
- Fabrikationspipeline: Topologische Sortierung
- Geometrische Probleme, z.B. Konvexe Hülle

Charakteristik

- Extrem grosse Anzahl potentieller Lösungen
- Praktische Anwendung

Datenstrukturen

- Organisation der Daten, zugeschnitten auf die Algorithmen die auf den Daten operieren
- Programme = Algorithmen + Datenstrukturen.

Sehr schwierige Probleme

- NP-vollständige Probleme: Keine bekannte effiziente Lösung (Fehlen einer solchen Lösung ist aber unbewiesen!)
- Beispiel: Travelling Salesman Problem

Ein Traum

- Wären Rechner unendlich schnell und hätten unendlich viel Speicher ...
- ... dann bräuchten wir die Theorie der Algorithmen (nur) für Aussagen über Korrektheit (incl. Terminierung).

Die Realität

Ressourcen sind beschränkt und nicht umsonst:

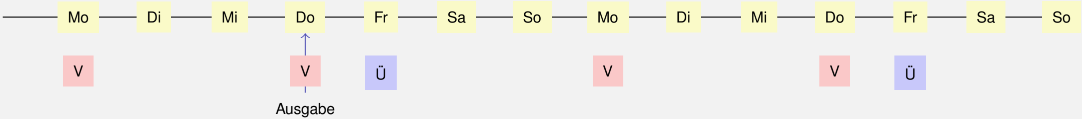
- Rechenzeit $\rightarrow$ Effizienz
- Speicherplatz $\rightarrow$ Effizienz

1.3 Organisation

Ablauf des Übungsbetriebes

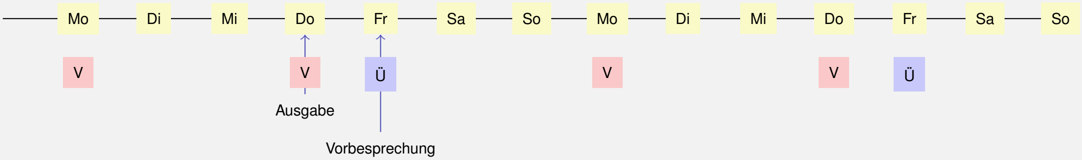
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
V			V	Ü			V			V	Ü		

Ablauf des Übungsbetriebes



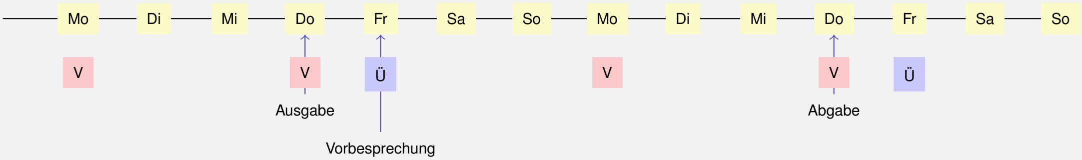
- Übungsblattausgabe zur Vorlesung am Donnerstag (online).

Ablauf des Übungsbetriebes



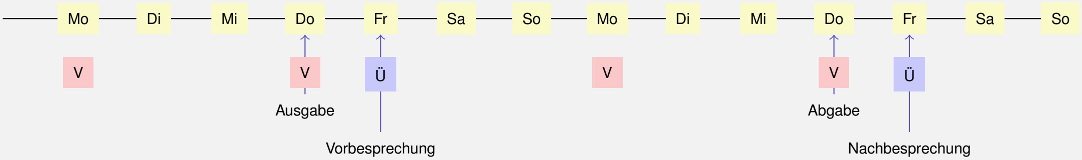
- Vorbesprechung am Freitag.

Ablauf des Übungsbetriebes



- Bearbeitung der Übung bis spätestens am Donnerstag darauf.

Ablauf des Übungsbetriebes

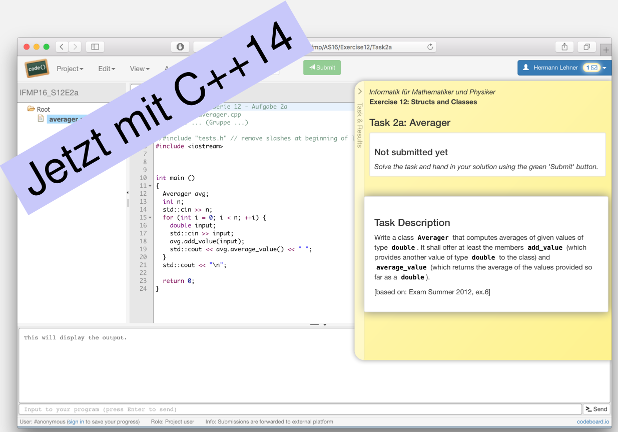


- Nachbesprechung der Übung am Freitag darauf. Feeback zu den Abgaben innerhalb einer Woche nach Nachbesprechung.

Codeboard

Codeboard ist eine Online-IDE: Programmieren im Browser!

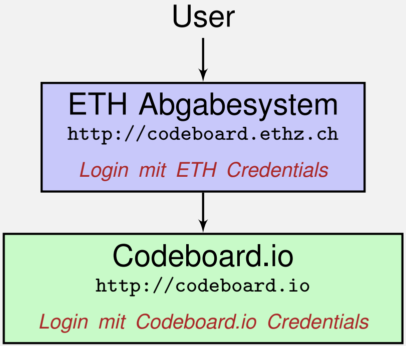
- Sie können Beispiele ausprobieren, ohne dass Sie irgendwelche Tools installieren müssen.
- Auch für die Übungen eingesetzt.



Codeboard @ETH

Codeboard besteht aus zwei unabhängigen Systemen, die miteinander kommunizieren:

- **Das ETH Abgabesystem:** Ermöglicht es uns, ihre Aufgaben zu bewerten
- **Die Online IDE:** Die Programmierumgebung



Codeboard

Codeboard.io Registrierung

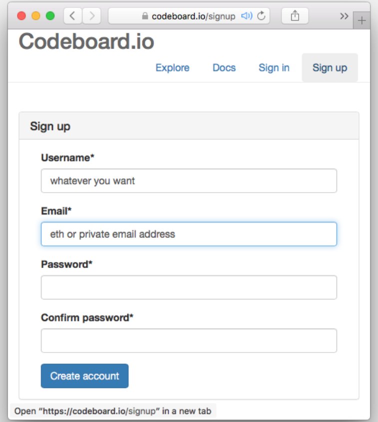
Gehen Sie auf `http://codeboard.io` und erstellen Sie dort ein Konto, bleiben Sie am besten eingeloggt.

Einschreibung in Übungsgruppen

Gehen Sie auf `http://codeboard.ethz.ch/da` und schreiben Sie sich dort in eine Übungsgruppe ein.

Codeboard.io Registrierung

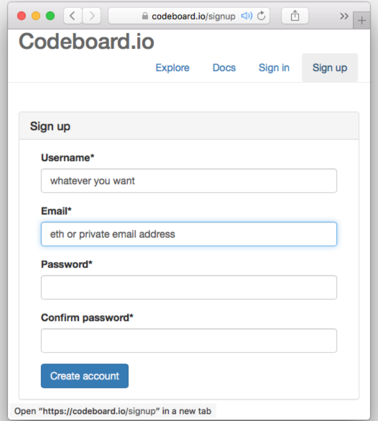
Falls Sie noch keinen **Codeboard.io** Account haben ...



- Wir verwenden die Online IDE **Codeboard.io**

Codeboard.io Registrierung

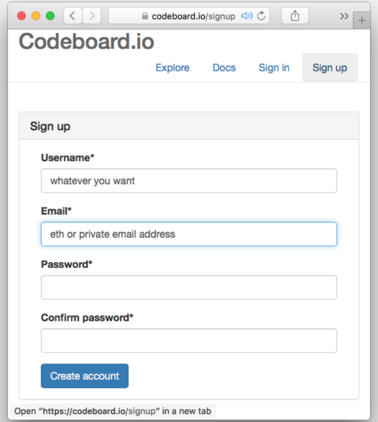
Falls Sie noch keinen **Codeboard.io** Account haben ...



- Wir verwenden die Online IDE **Codeboard.io**
- Erstellen Sie dort einen Account, um Ihren Fortschritt abzuspeichern und später Submissions anzuschauen

Codeboard.io Registrierung

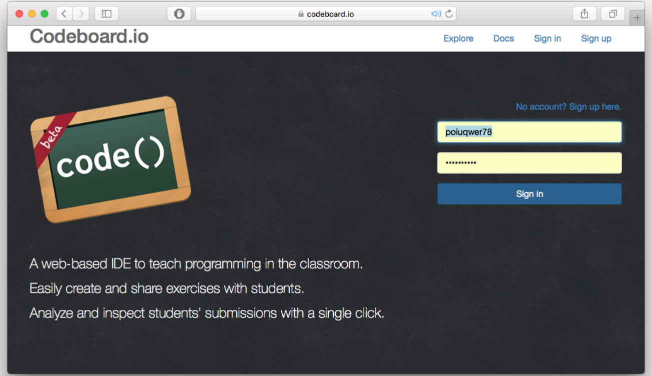
Falls Sie noch keinen **Codeboard.io** Account haben ...



- Wir verwenden die Online IDE **Codeboard.io**
- Erstellen Sie dort einen Account, um Ihren Fortschritt abzuspeichern und später Submissions anzuschauen
- Anmeldedaten können beliebig gewählt werden! *Verwenden Sie nicht das ETH Passwort.*

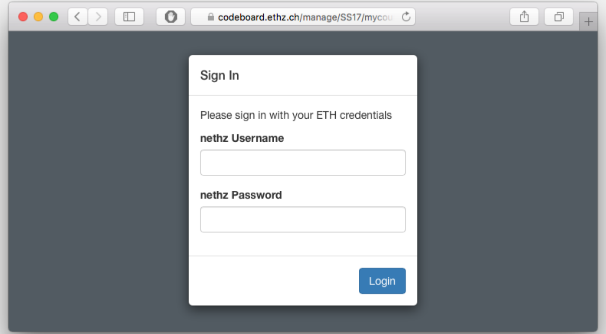
Codeboard.io Login

Falls Sie schon einen Account haben, loggen Sie sich ein:



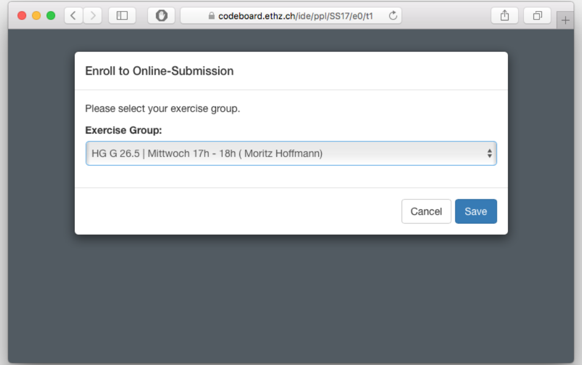
Einschreibung in Übungsgruppen - I

- Besuchen Sie `http://codeboard.ethz.ch/da`
- Loggen Sie sich mit Ihrem nethz Account ein.



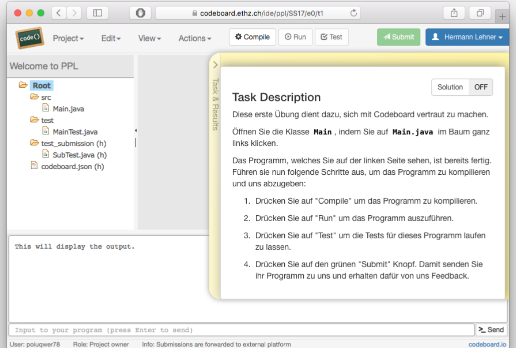
Einschreibung in Übungsgruppen - II

Schreiben Sie sich in diesem Dialog in eine Übungsgruppe ein.



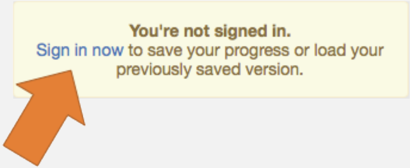
Die erste Übung

Sie sind nun eingeschrieben und die erste Übung ist geladen. Folgen Sie den Anweisungen in der gelben Box. Das Übungsblatt auf der Kurshomepage enthält weitere Anweisungen und Erklärungen.



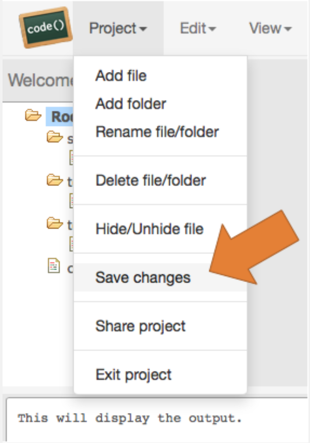
Die erste Übung - Codeboard.io Login

Falls Sie diese Nachricht sehen, klicken Sie auf Sign in now und melden Sie sich dort mit ihrem **Codeboard.io** Account ein.



Die erste Übung - Fortschritt speichern!

Achtung! Speichern Sie ihren Fortschritt regelmässig ab. So können Sie jederzeit an einem anderen Ort weiterarbeiten.



Zu den Übungen

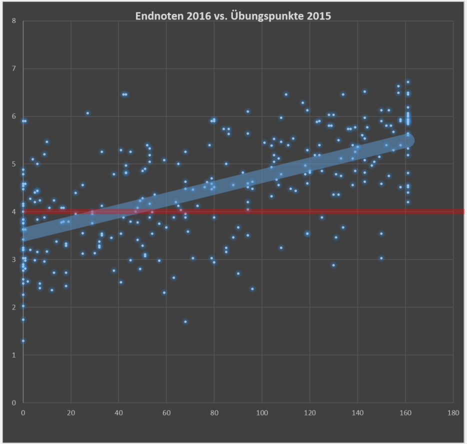
- Seit HS 2013 für Prüfungszulassung kein Testat mehr erforderlich.

Zu den Übungen

- Bearbeitung der wöchentlichen Uebungsserien ist freiwillig, wird aber dringend empfohlen!

Zu den Übungen

- Bearbeitung der wöchentlichen Uebungsserien ist freiwillig, wird aber dringend empfohlen!



Relevantes für die Prüfung

Prüfungsstoff für die Endprüfung (in der Prüfungssession 2017) schliesst ein

- Vorlesungsinhalt (Vorlesung, Handout) und
- Übungsinhalte (Übungsstunden, Übungsblätter).

Relevantes für die Prüfung

Prüfung (120 min) ist schriftlich. Hilfsmittel: vier A4-Seiten (bzw. 2 A4-Blätter doppelseitig) entweder handgeschrieben oder mit Fontgrösse minimal 11 Punkt.

In Ihrem und unserem Interesse

Bitte melden sie frühzeitig, wenn Sie Probleme sehen, wenn Ihnen

- die Vorlesung zu schnell, zu schwierig, zu .... ist
- die Übungen nicht machbar sind ...
- Sie sich nicht gut betreut fühlen ...

Kurz: wenn Ihnen irgendetwas
auf dem Herzen liegt.

1.4 Altägyptische Multiplikation

Altägyptische Multiplikation

Beispiel 1: Altägyptische Multiplikation[1]

Berechnung von $11 \cdot 9$

$$11 \,\big|\, 9 \qquad\qquad 9 \,\big|\, 11$$

[1] Auch bekannt als Russiche Bauernmulltiplikation

Beispiel 1: Altägyptische Multiplikation[1]

Berechnung von $11 \cdot 9$

$$11 \mid 9 \qquad\qquad 9 \mid 11$$

1. Links verdoppeln, rechts ganzzahlig halbieren.

[1] Auch bekannt als Russiche Bauernmulltiplikation

Beispiel 1: Altägyptische Multiplikation[1]

Berechnung von $11 \cdot 9$

$$\begin{array}{r|r} 11 & 9 \\ 22 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 9 & 11 \\ 18 & 5 \end{array}$$

1. Links verdoppeln, rechts ganzzahlig halbieren.

[1] Auch bekannt als Russiche Bauernmulltiplikation

Beispiel 1: Altägyptische Multiplikation[1]

Berechnung von $11 \cdot 9$

$$\begin{array}{r|l} 11 & 9 \\ 22 & 4 \\ 44 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 9 & 11 \\ 18 & 5 \\ 36 & 2 \end{array}$$

1. Links verdoppeln, rechts ganzzahlig halbieren.

[1] Auch bekannt als Russiche Bauernmulltiplikation

Beispiel 1: Altägyptische Multiplikation[1]

Berechnung von $11 \cdot 9$

$$\begin{array}{r|l} 11 & 9 \\ 22 & 4 \\ 44 & 2 \\ 88 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 9 & 11 \\ 18 & 5 \\ 36 & 2 \\ 72 & 1 \end{array}$$

1. Links verdoppeln, rechts ganzzahlig halbieren.
2. Gerade Zahl rechts $\Rightarrow$ Zeile streichen.

[1] Auch bekannt als Russiche Bauernmulltiplikation

Beispiel 1: Altägyptische Multiplikation[1]

Berechnung von $11 \cdot 9$

$$\begin{array}{r|r} 11 & 9 \\ \cancel{22} & \cancel{4} \\ \cancel{44} & \cancel{2} \\ 88 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 9 & 11 \\ 18 & 5 \\ \cancel{36} & \cancel{2} \\ 72 & 1 \end{array}$$

1. Links verdoppeln, rechts ganzzahlig halbieren.
2. Gerade Zahl rechts $\Rightarrow$ Zeile streichen.

[1] Auch bekannt als Russiche Bauernmulltiplikation

Beispiel 1: Altägyptische Multiplikation[1]

Berechnung von $11 \cdot 9$

$$\begin{array}{r|r} 11 & 9 \\ \cancel{22} & \cancel{4} \\ \cancel{44} & \cancel{2} \\ 88 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 9 & 11 \\ 18 & 5 \\ \cancel{36} & \cancel{2} \\ 72 & 1 \end{array}$$

1. Links verdoppeln, rechts ganzzahlig halbieren.
2. Gerade Zahl rechts $\Rightarrow$ Zeile streichen.
3. Übrige Zeilen links addieren.

[1] Auch bekannt als Russiche Bauernmulltiplikation

Beispiel 1: Altägyptische Multiplikation[1]

Berechnung von $11 \cdot 9$

$$\begin{array}{r|r} 11 & 9 \\ \cancel{22} & \cancel{4} \\ \cancel{44} & \cancel{2} \\ 88 & 1 \\ \hline 99 & - \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 9 & 11 \\ 18 & 5 \\ \cancel{36} & \cancel{2} \\ 72 & 1 \\ \hline 99 & \end{array}$$

1. Links verdoppeln, rechts ganzzahlig halbieren.
2. Gerade Zahl rechts $\Rightarrow$ Zeile streichen.
3. Übrige Zeilen links addieren.

[1] Auch bekannt als Russiche Bauernmulltiplikation

Vorteile

- Kurze Beschreibung, einfach zu verstehen.
- Effizient für Computer im Dualsystem: Verdoppeln = Left Shift, Halbieren = Right Shift

Beispiel

left shift	$9 = 01001_2 \to 10010_2 = 18$
right shift	$9 = 01001_2 \to 00100_2 = 4$

Fragen

- Funktioniert das immer? (z.B. für negative Zahlen)
- Wenn nicht, wann?
- Wie beweist man die Korrektheit?
- Besser als die "Schulmethode"?
- Was heisst "gut"? Lässt sich Güte anordnen?
- Wie schreibt man das Verfahren unmissverständlich auf?

Beobachtung

Wenn $b > 1$, $a \in \mathbb{Z}$, dann:

$$a \cdot b = \begin{cases} 2a \cdot \frac{b}{2} & \text{falls } b \text{ gerade,} \\ a + 2a \cdot \frac{b-1}{2} & \text{falls } b \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Terminierung

$$a \cdot b = \begin{cases} a & \text{falls } b = 1, \\ 2a \cdot \frac{b}{2} & \text{falls } b \text{ gerade}, \\ a + 2a \cdot \frac{b-1}{2} & \text{falls } b \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Rekursiv funktional notiert

$$f(a,b) = \begin{cases} a & \text{falls } b = 1, \\ f(2a, \frac{b}{2}) & \text{falls } b \text{ gerade}, \\ a + f(2a, \frac{b-1}{2}) & \text{falls } b \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Funktion programmiert

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b){
    if(b==1)
        return a;
    else if (b%2 == 0)
        return f(2*a, b/2);
    else
        return a + f(2*a, (b-1)/2);
}
```

Korrektheit

$$f(a,b) = \begin{cases} a & \text{falls } b = 1, \\ f(2a, \frac{b}{2}) & \text{falls } b \text{ gerade}, \\ a + f(2a \cdot \frac{b-1}{2}) & \text{falls } b \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Zu zeigen: $f(a,b) = a \cdot b$ für $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^+$.

Beweis per Induktion

Anfang: $b = 1 \Rightarrow f(a,b) = a = a \cdot 1$.
Hypothese: $f(a,b') = a \cdot b'$ für $0 < b' \leq b$
Schritt: $f(a,b+1) \stackrel{!}{=} a \cdot (b+1)$

$$f(a,b+1) = \begin{cases} f(2a, \frac{\overbrace{b+1}^{\leq b}}{2}) = a \cdot (b+1) & \text{falls } b \text{ ungerade,} \\ a + f(2a, \underbrace{\frac{b}{2}}_{\leq b}) = a + a \cdot b & \text{falls } b \text{ gerade.} \end{cases}$$

$\blacksquare$

Endrekursion

Die Rekursion lässt sich *endrekursiv* schreiben

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b){
  if(b==1)
    return a;
  else if (b%2 == 0)
    return f(2*a, b/2);
  else
    return a + f(2*a, (b-1)/2);
}
```

$\longrightarrow$

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b){
  if(b==1)
    return a;
  int z=0;
  if (b%2 != 0){
    --b;
    z=a;
  }
  return z + f(2*a, b/2);
}
```

Endrekursion ⇒ Iteration

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b){
  if(b==1)
    return a;
  int z=0;
  if (b%2 != 0){
    --b;
    z=a;
  }
  return z + f(2*a, b/2);
}
```

→

```
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b != 1) {
    int z = 0;
    if (b % 2 != 0){
      --b;
      z = a;
    }
    res += z;
    a *= 2; // neues a
    b /= 2; // neues b
  }
  res += a; // Basisfall b=1
  return res;
}
```

Vereinfachen

```
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b != 1) {
    int z = 0;
    if (b % 2 != 0){
      --b;  ⟶ Teil der Division
      z = a;⟶ Direkt in res
    }
    res += z;
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  res += a;  ⟶ in den Loop
  return res;
}
```

⟶

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0)
      res += a;
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Invarianten!

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0){
      res += a;
      --b;
    }
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Sei $x = a \cdot b$.

Invarianten!

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0){
      res += a;
      --b;
    }
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Sei $x = a \cdot b$.

Hier gilt $x = \boxed{a \cdot b + res}$

Invarianten!

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0){
      res += a;
      --b;
    }
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Sei $x = a \cdot b$.

Hier gilt $x = \boxed{a \cdot b + res}$

Wenn hier $x = a \cdot b + res$ ...

Invarianten!

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0){
      res += a;
      --b;
    }
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Sei $x = a \cdot b$.

Hier gilt $x = \boxed{a \cdot b + res}$

Wenn hier $x = a \cdot b + res$ ...

... dann auch hier $x = a \cdot b + res$

Invarianten!

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0){
      res += a;
      --b;
    }
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Sei $x = a \cdot b$.

Hier gilt $x = \boxed{a \cdot b + res}$

Wenn hier $x = a \cdot b + res$ ...

... dann auch hier $x = a \cdot b + res$

b gerade

Invarianten!

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0){
      res += a;
      --b;
    }
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Sei $x = a \cdot b$.

Hier gilt $x = \boxed{a \cdot b + res}$

Wenn hier $x = a \cdot b + res$ ...

... dann auch hier $x = a \cdot b + res$

b gerade

Hier gilt $x = a \cdot b + res$

Invarianten!

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0){
      res += a;
      --b;
    }
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Sei $x = a \cdot b$.

Hier gilt $x = \boxed{a \cdot b + res}$

Wenn hier $x = a \cdot b + res$ ...

... dann auch hier $x = a \cdot b + res$

b gerade

Hier gilt $x = a \cdot b + res$

Hier gilt $x = a \cdot b + res$ und $b = 0$

Invarianten!

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0){
      res += a;
      --b;
    }
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Sei $x = a \cdot b$.

Hier gilt $x = \boxed{a \cdot b + res}$

Wenn hier $x = a \cdot b + res$ ...

... dann auch hier $x = a \cdot b + res$

b gerade

Hier gilt $x = a \cdot b + res$

Hier gilt $x = a \cdot b + res$ und $b = 0$

Also $res = x$.

Zusammenfassung

Der Ausdruck $a \cdot b + res$ ist eine *Invariante*.

- Werte von a, b, res ändern sich, aber die Invariante bleibt ”im Wesentlichen“ unverändert:
- Invariante vorübergehend durch eine Anweisung zerstört, aber dann darauf wieder hergestellt.
- Betrachtet man solche Aktionsfolgen als atomar, bleibt der Wert tatsächlich invariant
- Insbesondere erhält die Schleife die Invariante (*Schleifeninvariante*), wirkt dort wie der Induktionsschritt bei der vollständigen Induktion
- Invarianten sind offenbar mächtige Beweishilfsmittel!

Weiteres Kürzen

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    if (b % 2 != 0)
      res += a;
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

→

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    res += a * (b%2);
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Analyse

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    res += a * (b%2);
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Altägyptische Multiplikation entspricht der Schulmethode zur Basis 2.

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \times \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

Analyse

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    res += a * (b%2);
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Altägyptische Multiplikation entspricht der Schulmethode zur Basis 2.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & \times & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & (9)
\end{array}
$$

Analyse

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    res += a * (b%2);
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Altägyptische Multiplikation entspricht der Schulmethode zur Basis 2.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & \times & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
\hline
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & & (9) \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & (18)
\end{array}
$$

Analyse

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    res += a * (b%2);
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Altägyptische Multiplikation entspricht der Schulmethode zur Basis 2.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & \times & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
\hline
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & & (9) \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & (18) \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
\end{array}
$$

Analyse

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    res += a * (b%2);
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Altägyptische Multiplikation entspricht der Schulmethode zur Basis 2.

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & \times & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & (9) \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & & (18) \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & (72)
\end{array}
$$

Analyse

```
// pre: b>0
// post: return a*b
int f(int a, int b) {
  int res = 0;
  while (b > 0) {
    res += a * (b%2);
    a *= 2;
    b /= 2;
  }
  return res;
}
```

Altägyptische Multiplikation entspricht der Schulmethode zur Basis 2.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & \times & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
\hline
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & & (9) \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & (18) \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & (72) \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & (99)
\end{array}
$$

Effizienz

Frage: Wie lange dauert eine Multiplikation von a und b?

- Mass für die Effizienz
  - Gesamtzahl der elementaren Operationen: Verdoppeln, Halbieren, Test auf "gerade", Addition
  - Im rekursiven Code: maximal 6 Operationen pro Aufruf
- Wesentliches Kriterium:
  - Anzahl rekursiver Aufrufe oder
  - Anzahl Schleifendurchläufe(im iterativen Fall)
- $\frac{b}{2^n} \leq 1$ gilt für $n \geq \log_2 b$. Also nicht mehr als $6\lceil \log_2 b \rceil$ elementare Operationen.

1.5 Schnelle Multiplikation von Zahlen

[Ottman/Widmayer, Kap. 1.2.3]

Beispiel 2: Multiplikation grosser Zahlen

Primarschule:

$$\begin{array}{cccccc|c} & a & b & & c & d & \\ & 6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\ \hline & & & & 1 & 4 & d \cdot b \end{array}$$

Beispiel 2: Multiplikation grosser Zahlen

Primarschule:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
a & b & & c & d & \\
6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & 1 & 4 & d \cdot b \\
 & & 4 & 2 & & d \cdot a
\end{array}
$$

Beispiel 2: Multiplikation grosser Zahlen

Primarschule:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
a & b & & c & d & \\
6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & 1 & 4 & d \cdot b \\
 & & 4 & 2 & & d \cdot a \\
 & & & 6 & & c \cdot b
\end{array}
$$

Beispiel 2: Multiplikation grosser Zahlen

Primarschule:

$$\begin{array}{ccccc|c}
\color{gray}{a} & \color{gray}{b} & & \color{gray}{c} & \color{gray}{d} & \\
6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & 1 & 4 & \color{gray}{d \cdot b} \\
 & & 4 & 2 & & \color{gray}{d \cdot a} \\
 & & & 6 & & \color{gray}{c \cdot b} \\
 & 1 & 8 & & & \color{gray}{c \cdot a} \\
\hline
\end{array}$$

Beispiel 2: Multiplikation grosser Zahlen

Primarschule:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & a & b & & c & d & \\
 & 6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & & 1 & 4 & d \cdot b \\
 & & & 4 & 2 & & d \cdot a \\
 & & & & 6 & & c \cdot b \\
 & & 1 & 8 & & & c \cdot a \\
\hline
= & & 2 & 2 & 9 & 4 &
\end{array}
$$

Beispiel 2: Multiplikation grosser Zahlen

Primarschule:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & a & b & & c & d & \\
 & 6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & & 1 & 4 & d \cdot b \\
 & & & 4 & 2 & & d \cdot a \\
 & & & & 6 & & c \cdot b \\
 & & 1 & 8 & & & c \cdot a \\
\hline
= & & 2 & 2 & 9 & 4 &
\end{array}
$$

$2 \cdot 2 = 4$ einstellige Multiplikationen.

Beispiel 2: Multiplikation grosser Zahlen

Primarschule:

$$\begin{array}{ccccc|c}
 & a & b & & c & d & \\
 & 6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & & 1 & 4 & d \cdot b \\
 & & & 4 & 2 & & d \cdot a \\
 & & & & 6 & & c \cdot b \\
 & & 1 & 8 & & & c \cdot a \\
\hline
= & & 2 & 2 & 9 & 4 &
\end{array}$$

$2 \cdot 2 = 4$ einstellige Multiplikationen. $\Rightarrow$ Multiplikation zweier n-stelliger Zahlen: n^2 einstellige Multiplikationen

Beobachtung

$$ab \cdot cd = (10 \cdot a + b) \cdot (10 \cdot c + d)$$

Beobachtung

$$
\begin{aligned}
ab \cdot cd &= (10 \cdot a + b) \cdot (10 \cdot c + d) \\
&= 100 \cdot a \cdot c + 10 \cdot a \cdot c \\
&\quad + 10 \cdot b \cdot d + b \cdot d \\
&\quad + 10 \cdot (a - b) \cdot (d - c)
\end{aligned}
$$

Verbesserung?

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & a & b & & c & d & \\
 & 6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & & 1 & 4 & d \cdot b
\end{array}
$$

Verbesserung?

$$
\begin{array}{ccccc|l}
a & b & & c & d & \\
6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & 1 & 4 & d \cdot b \\
 & & 1 & 4 & & d \cdot b
\end{array}
$$

Verbesserung?

$$
\begin{array}{ccccc|l}
a & b & & c & d & \\
6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & 1 & 4 & d \cdot b \\
 & & 1 & 4 & & d \cdot b \\
 & & 1 & 6 & & (a-b)\cdot(d-c)
\end{array}
$$

Verbesserung?

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & a & b & & c & d & \\
 & 6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & & 1 & 4 & d \cdot b \\
 & & & 1 & 4 & & d \cdot b \\
 & & & 1 & 6 & & (a-b)\cdot(d-c) \\
 & & & 1 & 8 & & c \cdot a
\end{array}
$$

Verbesserung?

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & a & b & & c & d & \\
 & 6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & & 1 & 4 & d \cdot b \\
 & & & 1 & 4 & & d \cdot b \\
 & & & 1 & 6 & & (a-b)\cdot(d-c) \\
 & & & 1 & 8 & & c \cdot a \\
 & & 1 & 8 & & & c \cdot a \\
\hline
\end{array}
$$

Verbesserung?

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & a & b & & c & d & \\
 & 6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & & 1 & 4 & d \cdot b \\
 & & & 1 & 4 & & d \cdot b \\
 & & & 1 & 6 & & (a-b)\cdot(d-c) \\
 & & & 1 & 8 & & c \cdot a \\
 & & 1 & 8 & & & c \cdot a \\
\hline
= & & 2 & 2 & 9 & 4 &
\end{array}
$$

Verbesserung?

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & a & b & & c & d & \\
 & 6 & 2 & \cdot & 3 & 7 & \\
\hline
 & & & & 1 & 4 & d \cdot b \\
 & & & 1 & 4 & & d \cdot b \\
 & & & 1 & 6 & & (a-b)\cdot(d-c) \\
 & & & 1 & 8 & & c \cdot a \\
 & & 1 & 8 & & & c \cdot a \\
\hline
= & & 2 & 2 & 9 & 4 &
\end{array}
$$

$\rightarrow$ 3 einstellige Multiplikationen.

Grosse Zahlen

$$6237 \cdot 5898 = \underbrace{62}_{a'}\underbrace{37}_{b'} \cdot \underbrace{58}_{c'}\underbrace{98}_{d'}$$

Grosse Zahlen

$$6237 \cdot 5898 = \underbrace{62}_{a'}\underbrace{37}_{b'} \cdot \underbrace{58}_{c'}\underbrace{98}_{d'}$$

Rekursive / induktive Anwendung: $a' \cdot c'$, $a' \cdot d'$, $b' \cdot c'$ und $c' \cdot d'$ wie oben berechnen.

Grosse Zahlen

$$6237 \cdot 5898 = \underbrace{62}_{a'}\underbrace{37}_{b'} \cdot \underbrace{58}_{c'}\underbrace{98}_{d'}$$

Rekursive / induktive Anwendung: $a' \cdot c'$, $a' \cdot d'$, $b' \cdot c'$ und $c' \cdot d'$ wie oben berechnen.

$\rightarrow 3 \cdot 3 = 9$ statt 16 einstellige Multiplikationen.

Verallgemeinerung

Annahme: zwei n-stellige Zahlen, $n = 2^k$ für ein k.

$$\begin{aligned}(10^{n/2}a + b) \cdot (10^{n/2}c + d) &= 10^n \cdot a \cdot c + 10^{n/2} \cdot a \cdot c \\ &+ 10^{n/2} \cdot b \cdot d + b \cdot d \\ &+ 10^{n/2} \cdot (a - b) \cdot (d - c)\end{aligned}$$

Rekursive Anwendung dieser Formel: Algorithmus von Karatsuba und Ofman (1962).

Analyse

$M(n)$: Anzahl einstelliger Multiplikationen.

Rekursive Anwendung des obigen Algorithmus $\Rightarrow$ Rekursionsgleichung:

$$M(2^k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0, \\ 3 \cdot M(2^{k-1}) & \text{falls } k > 0. \end{cases}$$

Teleskopieren

Iterative Einsetzen der Rekursionsformel zum Lösen der Rekursionsgleichung.

$$M(2^k) = 3 \cdot M(2^{k-1})$$

Teleskopieren

Iterative Einsetzen der Rekursionsformel zum Lösen der Rekursionsgleichung.

$$M(2^k) = 3 \cdot M(2^{k-1}) = 3 \cdot 3 \cdot M(2^{k-2}) = 3^2 \cdot M(2^{k-2})$$

Teleskopieren

Iterative Einsetzen der Rekursionsformel zum Lösen der Rekursionsgleichung.

$$\begin{aligned} M(2^k) &= 3 \cdot M(2^{k-1}) = 3 \cdot 3 \cdot M(2^{k-2}) = 3^2 \cdot M(2^{k-2}) \\ &= \ldots \\ &\overset{!}{=} 3^k \cdot M(2^0) = 3^k. \end{aligned}$$

Beweis: Vollständige Induktion

Hypothese H:

$$M(2^k) = 3^k.$$

Beweis: Vollständige Induktion

Hypothese H:

$$M(2^k) = 3^k.$$

Induktionsanfang ($k = 0$):

$$M(2^0) = 3^0 = 1. \quad \checkmark$$

Beweis: Vollständige Induktion

Hypothese H:

$$M(2^k) = 3^k.$$

Induktionsanfang ($k = 0$):

$$M(2^0) = 3^0 = 1. \quad \checkmark$$

Induktionsschritt ($k \to k+1$):

$$M(2^{k+1}) \overset{\text{def}}{=} 3 \cdot M(2^k) \overset{\text{H}}{=} 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}.$$

$\blacksquare$

Vergleich

Primarschulmethode: n^2 einstellige Multiplikationen.

Vergleich

Primarschulmethode: n^2 einstellige Multiplikationen.

Karatsuba/Ofman:

$$M(n) = 3^{\log_2 n} = (2^{\log_2 3})^{\log_2 n} = 2^{\log_2 3 \log_2 n} = n^{\log_2 3} \approx n^{1.58}.$$

Vergleich

Primarschulmethode: n^2 einstellige Multiplikationen.

Karatsuba/Ofman:

$$M(n) = 3^{\log_2 n} = (2^{\log_2 3})^{\log_2 n} = 2^{\log_2 3 \log_2 n} = n^{\log_2 3} \approx n^{1.58}.$$

Beispiel: 1000-stellige Zahl: $1000^2/1000^{1.58} \approx 18$.

Bestmöglicher Algorithums?

Wir kennen nun eine obere Schranke $n^{\log_2 3}$.

Es gibt praktisch (für grosses n) relevante, schnellere Algorithmen. Die beste obere Schranke ist nicht bekannt.

Untere Schranke: $n/2$ (Jede Ziffer muss zumindest einmal angeschaut werden).

1.6 Finde den Star

Konstruktiv?

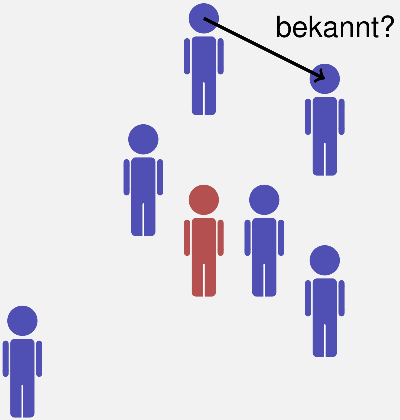
Übung: Finde ein schnelleres Multiplikationsverfahren.
Unsystematisches Suchen einer Lösung ⇒ ☹.

Betrachten nun ein konstruktiveres Beispiel.

Beispiel 3: Finde den Star!

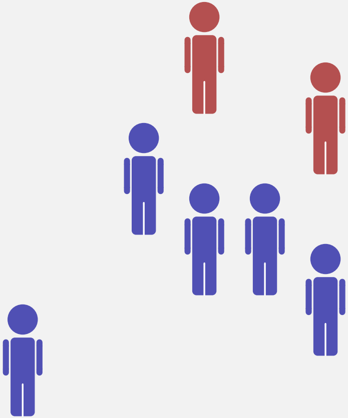
Raum mit $n > 1$ Personen.

- *Star:* Person, die niemanden anderen kennt, jedoch von allen gekannt wird.
- *Elementare Operation:* Einzige erlaubte Frage an Person A: "Kennst Du B?" ($B \neq A$)



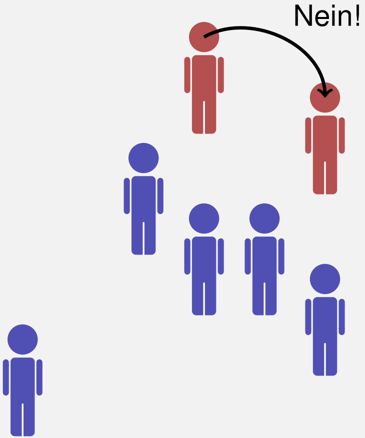
Problemeigenschaften

- Möglich: kein Star anwesend.
- Möglich: ein Star.
- Mehr als ein Star möglich?



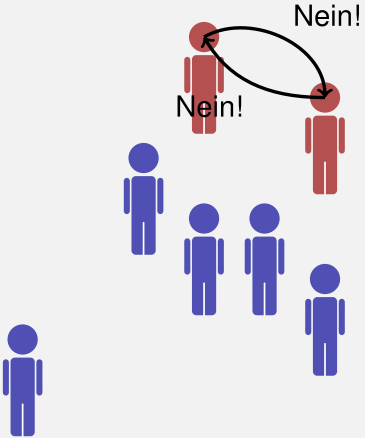
Problemeigenschaften

- Möglich: kein Star anwesend.
- Möglich: ein Star.
- Mehr als ein Star möglich?



Problemeigenschaften

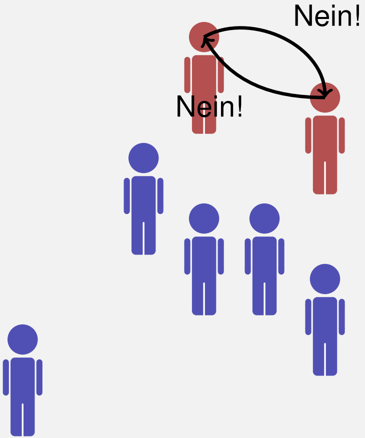
- Möglich: kein Star anwesend.
- Möglich: ein Star.
- Mehr als ein Star möglich?



Problemeigenschaften

- Möglich: kein Star anwesend.
- Möglich: ein Star.
- Mehr als ein Star möglich?

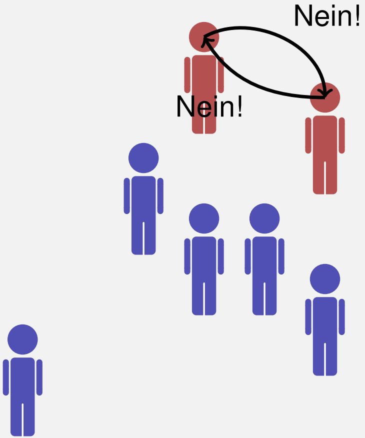
Annahme: Zwei Stars S_1, S_2.



Problemeigenschaften

- Möglich: kein Star anwesend.
- Möglich: ein Star.
- Mehr als ein Star möglich?

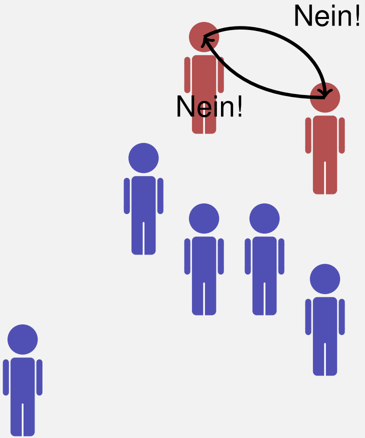
Annahme: Zwei Stars S_1, S_2.
S_1 kennt $S_2 \Rightarrow S_1$ kein Star.



Problemeigenschaften

- Möglich: kein Star anwesend.
- Möglich: ein Star.
- Mehr als ein Star möglich?

Annahme: Zwei Stars S_1, S_2.
S_1 kennt $S_2 \Rightarrow S_1$ kein Star.
S_1 kennt S_2 nicht $\Rightarrow S_2$ kein Star. $\perp$



Naive Lösung

Frage jeden über jeden.

Resultat:

	1	2	3	4
1	-	Ja	Nein	Nein
2	Nein	-	Nein	Nein
3	Ja	Ja	-	Nein
4	Ja	Ja	Ja	-

Naive Lösung

Frage jeden über jeden.

Resultat:

	1	2	3	4
1	-	Ja	Nein	Nein
2	Nein	-	Nein	Nein
3	Ja	Ja	-	Nein
4	Ja	Ja	Ja	-

Star ist 2.

Naive Lösung

Frage jeden über jeden.

Resultat:

	1	2	3	4
1	-	Ja	Nein	Nein
2	Nein	-	Nein	Nein
3	Ja	Ja	-	Nein
4	Ja	Ja	Ja	-

Star ist 2.

Anzahl Operationen (Fragen): $n \cdot (n-1)$.

Geht das besser?

Induktion: zerlege Problem in kleinere Teile.

Geht das besser?

Induktion: zerlege Problem in kleinere Teile.

- $n = 2$: Zwei Fragen genügen.

Geht das besser?

Induktion: zerlege Problem in kleinere Teile.

- $n = 2$: Zwei Fragen genügen.
- $n > 2$: Schicke eine Person A weg. Finde den Star unter $n - 1$ Personen. Danach überprüfe A mit $2 \cdot (n - 1)$ Fragen.

Geht das besser?

Induktion: zerlege Problem in kleinere Teile.

- $n = 2$: Zwei Fragen genügen.
- $n > 2$: Schicke eine Person A weg. Finde den Star unter $n - 1$ Personen. Danach überprüfe A mit $2 \cdot (n - 1)$ Fragen.

Gesamt
$F(n) = 2(n-1)+F(n-1) = 2(n-1)+2(n-2)+\cdots+2 = n(n-1).$

Geht das besser?

Induktion: zerlege Problem in kleinere Teile.

- $n = 2$: Zwei Fragen genügen.
- $n > 2$: Schicke eine Person A weg. Finde den Star unter $n-1$ Personen. Danach überprüfe A mit $2 \cdot (n-1)$ Fragen.

Gesamt
$F(n) = 2(n-1) + F(n-1) = 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 2 = n(n-1).$

Kein Gewinn.

Verbesserung

Idee: Vermeide, den Star rauszuschicken.

Verbesserung

Idee: Vermeide, den Star rauszuschicken.

- Frage eine beliebige Person A im Raum, ob sie B kennt.

Verbesserung

Idee: Vermeide, den Star rauszuschicken.

- Frage eine beliebige Person A im Raum, ob sie B kennt.
- Falls ja: A ist kein Star.

Verbesserung

Idee: Vermeide, den Star rauszuschicken.

- Frage eine beliebige Person A im Raum, ob sie B kennt.
- Falls ja: A ist kein Star.
- Falls nein: B ist kein Star.

Verbesserung

Idee: Vermeide, den Star rauszuschicken.

- Frage eine beliebige Person A im Raum, ob sie B kennt.
- Falls ja: A ist kein Star.
- Falls nein: B ist kein Star.
- Zum Schluss bleiben 2 Personen, von denen möglicherweise eine Person X der Star ist. Wir überprüfen mit jeder Person, die draussen ist, ob X ein Star sein kann.

Analyse

$$F(n) = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 2, \\ 1 + F(n-1) + 2 & \text{für } n > 2. \end{cases}$$

Analyse

$$F(n) = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 2, \\ 1 + F(n-1) + 2 & \text{für } n > 2. \end{cases}$$

Teleskopieren:

$$F(n) = 3 + F(n-1) = 2 \cdot 3 + F(n-2) = \cdots = 3 \cdot (n-2) + 2 = 3n - 4.$$

Beweis: Übung!

Moral

Bei vielen Problemen lässt sich ein induktives oder rekursives Lösungsmuster erarbeiten, welches auf der stückweisen Vereinfachung eines Problems basiert. Weiteres Beispiel in der nächsten Stunde.