

3. Wahrheitswerte

Boolesche Funktionen; der Typ `bool`; logische und relationale Operatoren; Kurzschlussauswertung

Wo wollen wir hin?

```
int a;  
std::cin >> a;  
if (a % 2 == 0)  
    std::cout << "even";  
else  
    std::cout << "odd";
```

Verhalten hängt ab vom Wert eines **Booleschen Ausdrucks**

Boolesche Werte in der Mathematik

Boolesche Ausdrücke können zwei mögliche Werte annehmen:

0 oder *1*

- *0* entspricht „*falsch*“
- *1* entspricht „*wahr*“

Der Typ `bool` in C++

- Repräsentiert *Wahrheitswerte*
- Literale `false` und `true`
- Wertebereich {*false*, *true*}

```
bool b = true; // Variable mit Wert true (wahr)
```

Relationale Operatoren

$a < b$ (kleiner als)
 $a >= b$ (grösser gleich)
 $a == b$ (gleich)
 $a != b$ (ungleich)

Zahlentyp \times Zahlentyp \rightarrow bool

R-Wert \times R-Wert \rightarrow R-Wert

Relationale Operatoren: Tabelle

	Symbol	Stelligkeit	Präzedenz	Assoziativität
Kleiner	<	2	11	links
Grösser	>	2	11	links
Kleiner gleich	<=	2	11	links
Grösser gleich	>=	2	11	links
Gleich	==	2	10	links
Ungleich	!=	2	10	links

Zahlentyp \times Zahlentyp \rightarrow bool

R-Wert \times R-Wert \rightarrow R-Wert

Boolesche Funktionen in der Mathematik

- Boolesche Funktion

$$f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$$

- 0 entspricht „falsch“.
- 1 entspricht „wahr“.

- “Logisches Und”

$$f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$$

- 0 entspricht „falsch”.

- 1 entspricht „wahr”.

x	y	$\text{AND}(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Logischer Operator &&

`a && b` (logisches Und)

`bool × bool → bool`

R-Wert × R-Wert → R-Wert

```
int n = -1;  
int p = 3;  
bool b = (n < 0) && (0 < p); // b = true (wahr)
```

- “Logisches Oder”

$$f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$$

- 0 entspricht „falsch”.

- 1 entspricht „wahr”.

x	y	$\text{OR}(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Logischer Operator ||

`a || b` (logisches Oder)

`bool × bool → bool`

R-Wert × R-Wert → R-Wert

```
int n = 1;  
int p = 0;  
bool b = (n < 0) || (0 < p); // b = false (falsch)
```

- “Logisches Nicht”

$$f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

- 0 entspricht „falsch”.
- 1 entspricht „wahr”.

x	NOT(x)
0	1
1	0

Logischer Operator !

!b (logisches Nicht)

bool → bool

R-Wert → R-Wert

```
int n = 1;  
bool b = !(n < 0); // b = true (wahr)
```

Präzedenzen

`!b && a`
⇕
`(!b) && a`

`a && b || c && d`
⇕
`(a && b) || (c && d)`

`a || b && c || d`
⇕
`a || (b && c) || d`

Logische Operatoren: Tabelle

	Symbol	Stelligkeit	Präzedenz	Assoziativität
Logisches Und (AND)	&&	2	6	links
Logisches Oder (OR)		2	5	links
Logisches Nicht (NOT)	!	1	16	rechts

Präzedenzen

Der unäre logische Operator !

bindet stärker als

binäre arithmetische Operatoren. Diese

binden stärker als

relationale Operatoren,

und diese binden stärker als

binäre logische Operatoren.

```
7 + x < y && y != 3 * z || ! b
7 + x < y && y != 3 * z || (!b)
```


Vollständigkeit

- AND, OR und NOT sind die in C++ verfügbaren Booleschen Funktionen.
- Alle anderen *binären* Booleschen Funktionen sind daraus erzeugbar.

x	y	$\text{XOR}(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\text{XOR}(x, y) = \text{AND}(\text{OR}(x, y), \text{NOT}(\text{AND}(x, y))).$$

$$x \oplus y = (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y).$$

$$(x \ || \ y) \ \&\& \ !(x \ \&\& \ y)$$

Vollständigkeit Beweis

- Identifiziere binäre Boolesche Funktionen mit ihrem charakteristischen Vektor.

x	y	XOR(x, y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Charakteristischer Vektor: 0110

$$\text{XOR} = f_{0110}$$

Vollständigkeit Beweis

- Schritt 1: erzeuge die *elementaren* Funktionen f_{0001} , f_{0010} , f_{0100} , f_{1000}

$$f_{0001} = \text{AND}(x, y)$$

$$f_{0010} = \text{AND}(x, \text{NOT}(y))$$

$$f_{0100} = \text{AND}(y, \text{NOT}(x))$$

$$f_{1000} = \text{NOT}(\text{OR}(x, y))$$

Vollständigkeit Beweis

- Schritt 2: erzeuge alle Funktionen durch “Veroderung” elementarer Funktionen

$$f_{1101} = \text{OR}(f_{1000}, \text{OR}(f_{0100}, f_{0001}))$$

- Schritt 3: erzeuge f_{0000}

$$f_{0000} = 0.$$

bool vs int: Konversion

- bool kann überall dort verwendet werden, wo int gefordert ist – und umgekehrt.
- Viele existierende Programme verwenden statt bool den Typ int.
Das ist schlechter Stil, der noch auf die Sprache C zurückgeht.

bool	→	int
<i>true</i>	→	1
<i>false</i>	→	0
int	→	bool
$\neq 0$	→	<i>true</i>
0	→	<i>false</i>

```
bool b = 3; // b=true
```

DeMorgansche Regeln

- $!(a \ \&\& \ b) == (!a \ || \ !b)$

- $!(a \ || \ b) == (!a \ \&\& \ !b)$

! (reich *und* schön) == (arm *oder* hässlich)

Anwendung: Entweder ... Oder (XOR)

`(x || y) && !(x && y)` x oder y, und nicht beide

`(x || y) && (!x || !y)` x oder y, und eines nicht

`!(!x && !y) && !(x && y)` nicht keines, und nicht beide

Kurzschlussauswertung

- Logische Operatoren `&&` und `||` werten den *linken Operanden* *zuerst* aus.
- Falls das Ergebnis dann schon feststeht, wird der rechte Operand *nicht mehr* ausgewertet.

```
x != 0 && z / x > y
```

⇒ Keine Division durch 0

Fehlerquellen

- Fehler, die der Compiler findet:
syntaktische und manche semantische Fehler
- Fehler, die der Compiler nicht findet:
Laufzeitfehler (immer semantisch)

Fehlerquellen vermeiden

1. Genaue Kenntnis des gewünschten Programmverhaltens

» It's not a bug, it's a feature !!«

2. Überprüfe an vielen kritischen Stellen, ob das Programm auf dem richtigen Weg ist!
3. Hinterfrage auch das (scheinbar) Offensichtliche, es könnte sich ein simpler Tippfehler eingeschlichen haben!

Gegen Laufzeitfehler: *Assertions*

`assert(expr)`

- hält das Programm an, falls der boolesche Ausdruck `expr` nicht wahr ist
- benötigt `#include <cassert>`
- kann abgeschaltet werden

DeMorgansche Regeln

Hinterfrage das Offensichtliche! Hinterfrage das **scheinbar**
Offensichtliche!

```
// Prog: assertion.cpp
// use assertions to check De Morgan's laws

#include<cassert>

int main()
{
    bool x; // whatever x and y actually are,
    bool y; // De Morgan's laws will hold:
    assert ( !(x && y) == (!x || !y) );
    assert ( !(x || y) == (!x && !y) );
    return 0;
}
```

Assertions abschalten

```
// Prog: assertion2.cpp
// use assertions to check De Morgan's laws. To tell the
// compiler to ignore them, #define NDEBUG ("no debugging")
// at the beginning of the program, before the #includes

#define NDEBUG
#include<cassert>

int main()
{
    bool x; // whatever x and y actually are,
    bool y; // De Morgan's laws will hold:
    assert ( !(x && y) == (!x || !y) ); // ignored by NDEBUG
    assert ( !(x || y) == (!x && !y) ); // ignored by NDEBUG
    return 0;
}
```

Div-Mod Identität

$$a/b * b + a \% b == a$$

Überprüfe, ob das Programm auf dem richtigen Weg ist. . .

```
std::cout << "Dividend a =? ";  
int a;  
std::cin >> a;
```

Eingabe der Argumente für
die Berechnung

```
std::cout << "Divisor b =? ";  
int b;  
std::cin >> b;
```

```
// check input
```

```
assert (b != 0);
```

Vorbedingung für die weitere Berechnung

Div-Mod Identität

$$a/b * b + a \% b == a$$

... und hinterfrage das Offensichtliche!

```
// check input
```

```
assert (b != 0);
```

← Vorbedingung für die weitere Berechnung

```
// compute result
```

```
int div = a / b;
```

```
int mod = a % b;
```

```
// check result
```

```
assert (div * b + mod == a);
```

← Div-Mod Identität

```
...
```

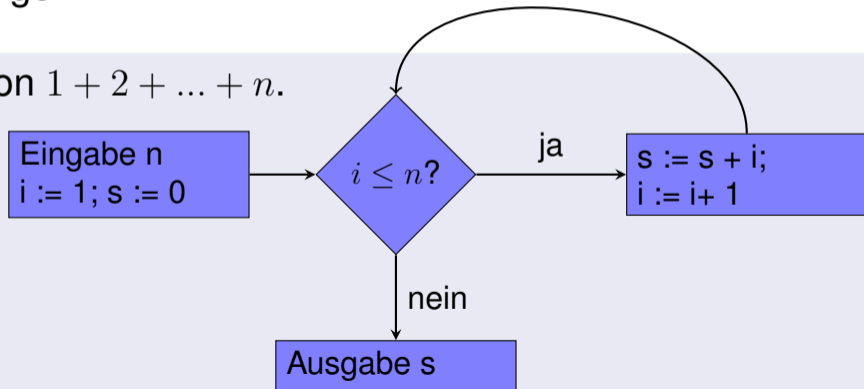

4. Kontrollanweisungen I

Auswahanweisungen, Iterationsanweisungen, Terminierung,
Blöcke

Kontrollfluss

- bisher *linear* (von oben nach unten)
- Für interessante Programme braucht man „Verzweigungen“ und „Sprünge“.

Berechnung von $1 + 2 + \dots + n$.



Auswahanweisungen

realisieren Verzweigungen

- `if` Anweisung
- `if-else` Anweisung

if-Anweisung

```
if ( condition )  
    statement
```

```
int a;  
std::cin >> a;  
if (a % 2 == 0)  
    std::cout << "even";
```

Ist *condition* wahr, dann wird *statement* ausgeführt.

- *statement*: beliebige Anweisung (*Rumpf* der if-Anweisung)
- *condition*: konvertierbar nach `bool`

if-else-Anweisung

```
if ( condition )  
    statement1  
else  
    statement2
```

```
int a;  
std::cin >> a;  
if (a % 2 == 0)  
    std::cout << "even";  
else  
    std::cout << "odd";
```

Ist *condition* wahr, so wird *statement1* ausgeführt, andernfalls wird *statement2* ausgeführt.

- *condition*: konvertierbar nach `bool`.
- *statement1*: Rumpf des if-Zweiges
- *statement2*: Rumpf des else-Zweiges

Layout!

```
int a;  
std::cin >> a;  
if (a % 2 == 0)  
    std::cout << "even"; ← Einrückung  
else  
    std::cout << "odd"; ← Einrückung
```

Iterationsanweisungen

realisieren „Schleifen“:

- `for`-Anweisung
- `while`-Anweisung
- `do`-Anweisung

Berechne $1 + 2 + \dots + n$

```
// Program: sum_n.cpp
// Compute the sum of the first n natural numbers.

#include <iostream>

int main()
{
    // input
    std::cout << "Compute the sum 1+...+n for n=? ";
    unsigned int n;
    std::cin >> n;

    // computation of sum_{i=1}^n i
    unsigned int s = 0;
    for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i) s += i;

    // output
    std::cout << "1+...+" << n << " = " << s << ".\n";
    return 0;
}
```

for-Anweisung am Beispiel

```
for ( unsigned int i=1; i <= n ; ++i )  
    s += i;
```

Annahmen: $n == 2$, $s == 0$

i		s
i==1	wahr	s == 1
i==2	wahr	s == 3
i==3	falsch	
		s == 3


for-Anweisung: Syntax

```
for ( init statement condition ; expression )  
    statement
```

- *init-statement*: Ausdrucksanweisung, Deklarationsanweisung, Nullanweisung
- *condition*: konvertierbar nach bool
- *expression*: beliebiger Ausdruck
- *statement* : beliebige Anweisung (*Rumpf* der for-Anweisung)

for-Anweisung: Semantik

```
for ( init statement condition ; expression )  
    statement
```

- *init-statement* wird ausgeführt
 - *condition* wird ausgewertet
 - true: Iteration beginnt
statement wird ausgeführt
expression wird ausgeführt
 - falsch: for-Anweisung wird beendet.
- 

Der kleine Gauß (1777 - 1855)

- Mathe-Lehrer wollte seine Schüler mit folgender Aufgabe beschäftigen:

Berechne die Summe der Zahlen von 1 bis 100 !

- Gauß war nach einer Minute fertig.

Die Lösung von Gauß

- Die gesuchte Zahl ist

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100.$$

- Das ist die Hälfte von

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + \dots + 99 + 100 \\ + 100 + 99 + \dots + 2 + 1 \\ \hline = 101 + 101 + \dots + 101 + 101 \end{array}$$

- Antwort: $100 \cdot 101/2 = 5050$

for-Anweisung: Terminierung

```
for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i)
    s += i;
```

Hier und meistens:

- *expression* ändert einen Wert, der in *condition* vorkommt.
- Nach endlich vielen Iterationen wird *condition* falsch:
Terminierung.

Endlosschleifen

- Endlosschleifen sind leicht zu produzieren:

```
for ( ; ; ) ;
```

- Die *leere condition* ist wahr.
 - Die *leere expression* hat keinen Effekt.
 - Die *Nullanweisung* hat keinen Effekt.
- ... aber nicht automatisch zu erkennen.

```
for ( e; v; e) r;
```

Halteproblem

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Es gibt kein C++ Programm, das für jedes C++- Programm P und jede Eingabe I korrekt feststellen kann, ob das Programm P bei Eingabe von I terminiert.

Das heisst, die Korrektheit von Programmen kann *nicht* automatisch überprüft werden.⁴

⁴Alan Turing, 1936. Theoretische Fragestellungen dieser Art waren für Alan Turing die Hauptmotivation für die Konstruktion seiner Rechenmaschine.

Beispiel: Primzahltest

Def.: Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ ist eine Primzahl, wenn kein $d \in \{2, \dots, n - 1\}$ ein Teiler von n ist.

Eine Schleife, die das testet:

```
unsigned int d;  
for (d=2; n%d != 0; ++d);
```

- Beobachtung 1:
Nach der `for`-Anweisung gilt $d \leq n$.
- Beobachtung 2:
 n ist Primzahl genau wenn am Ende $d = n$.

Blöcke

- Blöcke gruppieren mehrere Anweisungen zu einer neuen Anweisung

```
{statement1 statement2 ... statementN}
```

- Beispiel: Rumpf der main Funktion

```
int main() {  
    ...  
}
```

- Beispiel: Schleifenrumpf

```
for (unsigned int i = 1; i <= n; ++i) {  
    s += i;  
    std::cout << "partial sum is " << s << "\n";  
}
```