12. Rekursion

Mathematische Rekursion, Terminierung, der Aufrufstapel, Beispiele, Rekursion vs. Iteration, Lindenmayer Systeme

Lernziele

- Sie verstehen, wie eine Lösung eines rekursives Problems in Java umgesetzt werden kann.
- Sie wissen, wie Methoden in einem **Aufrufstapel** abgearbeitet werden.

Mathematische Rekursion

- Viele mathematische Funktionen sind sehr natürlich rekursiv definierbar.
- Das heisst, die Funktion erscheint in ihrer eigenen Definition.

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq 1 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Rekursion in Java: Genauso!

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq 1 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

```
// POST: return value is n!
public static int fac (int n) {
 if (n <= 1)
    return 1;
  else
    return n * fac (n-1);
}
```

Unendliche Rekursion

- ist so schlecht wie eine Endlosschleife…
- …nur noch schlechter (“verbrennt” Zeit **und** Speicher)

```
private static void f() {
  f(); // f() -> f() -> ... stack overflow
}
```


Rekursive Funktionen: Terminierung

Wie bei Schleifen brauchen wir

- Fortschritt Richtung Terminierung

`fac(n)`:
terminiert sofort für $n \leq 1$, andernfalls wird die Funktion rekursiv mit Argument $< n$ aufgerufen.

„n wird mit jedem Aufruf kleiner.”

Rekursive Funktionen: Auswertung

Beispiel: `fac(4)`

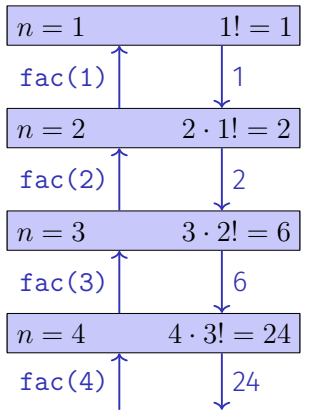
```
// POST: return value is n!
public static int fac (int n) {

  if (n <= 1) return 1;
  return n * fac(n-1); // n > 1
}
```

Initialisierung des formalen Arguments: $n = 4$
Rekursiver Aufruf mit Argument $n - 1 == 3$

Der Aufrufstapel

Bei jedem Methodenaufruf:

- Wert des Aufrufarguments kommt auf einen Stapel
- Es wird immer mit dem obersten Wert gearbeitet
- Am Ende des Aufrufs wird der oberste Wert wieder vom Stapel gelöscht



`Out.println(fac(4))`

Euklidischer Algorithmus

- findet den grössten gemeinsamen Teiler $\gcd(a, b)$ zweier natürlicher Zahlen a und b
- basiert auf folgender mathematischen Rekursion:

$$\gcd(a, b) = \begin{cases} a, & \text{falls } b = 0 \\ \gcd(b, a \bmod b), & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Euklidischer Algorithmus in Java

$$\gcd(a, b) = \begin{cases} a, & \text{falls } b = 0 \\ \gcd(b, a \bmod b), & \text{andernfalls} \end{cases}$$

```
public static int gcd (int a, int b) {
if (b == 0)
    return a;
  else
    return gcd (b, a % b);
}
```

Terminierung: $a \bmod b < b$, also wird b in jedem rekursiven Aufruf kleiner.

Fibonacci-Zahlen

$$F_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \ldots$

Fibonacci-Zahlen in Java

Laufzeit

fib(50) dauert „ewig", denn es berechnet
F_{48} 2-mal, F_{47} 3-mal, F_{46} 5-mal, F_{45} 8-mal, F_{44} 13-mal,
F_{43} 21-mal ... F_1 ca. 10^9 mal (!)

```
public static int fib (int n) {
  if (n == 0) return 0;
  if (n == 1) return 1;
  return fib (n-1) + fib (n-2); // n > 1
}
```

Korrektheit und Terminierung sind klar.

Schnelle Fibonacci-Zahlen

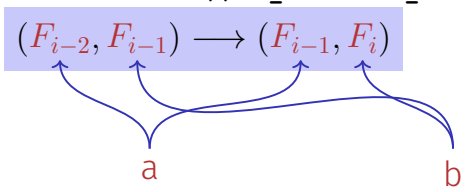
Idee:

- Berechne jede Fibonacci-Zahl nur einmal, in der Reihenfolge $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n$!
- Merke dir jeweils die zwei letzten berechneten Zahlen (Variablen `a` und `b`)!
- Berechne die nächste Zahl als Summe von `a` und `b`!

Schnelle Fibonacci-Zahlen in Java

```
public static int fib (int n){
  if (n == 0) return 0;
  if (n <= 2) return 1;
  int a = 1;  // F_1
  int b = 1;  // F_2
  for (int i = 3; i <= n; ++i){
    int a_old = a;  // F_i-2
    a = b;                    // F_i-1
    b += a_old;               // F_i-1 += F_i-2 -> F_i
  }
  return b;
}
```

sehr schnell auch bei `fib(50)`



Rekursion und Iteration

Rekursion kann *immer* simuliert werden durch

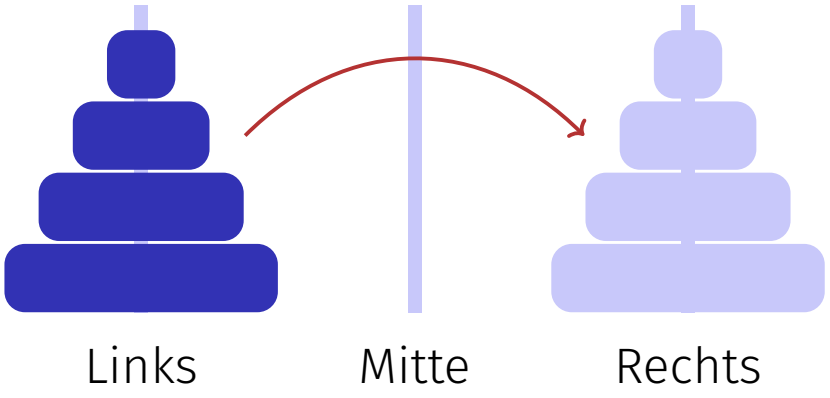
- Iteration (Schleifen)
- expliziten „Aufrufstapel” (z.B. Feld).

Oft sind rekursive Formulierungen einfacher, aber manchmal auch weniger effizient.

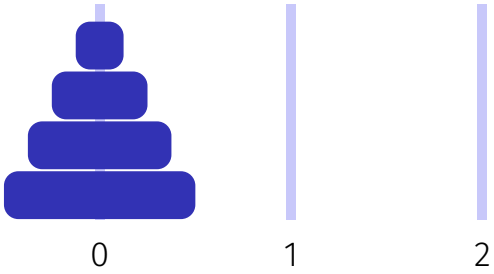
Die Macht der Rekursion

- Einige Probleme scheinen ohne Rekursion kaum lösbar zu sein. Mit Rekursion werden sie plötzlich einfacher lösbar.
- Beispiele: *Die Türme von Hanoi*, das n-Damen-Problem, Parsen von Ausdrücken, Sudoku-Löser, Umgekehrte Aus- oder Eingabe, Suchen in Bäumen, Divide-And-Conquer (z.B. Sortieren) $\rightarrow$ Informatik II

Experiment: Die Türme von Hanoi



Die Türme von Hanoi - Code



Bewege 4 Scheiben von 0 nach 2 mit Hilfsstapel 1:

```
move(4, 0, 1, 2);
```


Die Türme von Hanoi - Code

```
move(4, 0, 1, 2);
==
```

1. Bewege 3 Scheiben von 0 nach 1 mit Hilfsstapel 2:
   `move(3, 0, 2, 1);`
2. Bewege 1 Scheibe von 0 nach 2
   `move(1, 0, 1, 2);`
3. Bewege 3 Scheiben von 1 nach 2 mit Hilfsstapel 0
   `move(3, 1, 0, 2);`

Die Türme von Hanoi - Code

```
public static void move(int n, int source, int aux, int d
  if (n==1){
    Out.println("move " + source + "->" + dest);
  } else {
    move(n-1, source, dest, aux);
    move(1, source, aux, dest);
    move(n-1, aux, source, dest);
  }
}
```